FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.

Løsningsforslag til øving 2

Oppgave 1

a) Hvis vi velger $\phi(0) = \pi/2$, peker $\boldsymbol{r}(0)$ rett oppover, dvs $\hat{r}(0) = \hat{y}$ og $\hat{\phi}(0) = -\hat{x}$. Da innser vi at det vil passe bra med

$$\begin{aligned}\hat{r}(t) &= -\hat{x}\sin\omega t + \hat{y}\cos\omega t,\\ \hat{\phi}(t) &= -\hat{x}\cos\omega t - \hat{y}\sin\omega t.\end{aligned}$$

b) Sammenhengene som skal vises i resten av oppgaven er generelle og kan ikke avhenge av om vi velger $\phi(0) = 0$ eller $\phi(0) = \pi/2$. La oss her f.eks bruke det førstnevnte. Derivasjon av de oppgitte uttrykkene gir

$$\begin{aligned}\dot{\hat{r}} &= -\omega\hat{x}\sin\omega t + \omega\hat{y}\cos\omega t = \omega\hat{\phi}\\ \dot{\hat{\phi}} &= -\omega\hat{x}\cos\omega t - \omega\hat{y}\sin\omega t = -\omega\hat{r}\end{aligned}$$

c) Siden $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$ og r er konstant, har vi

$$\boldsymbol{v} = r\dot{\hat{r}} = r\omega\hat{\phi},$$

der vi brukte det første resultatet i spm *b*. Akselerasjonen:

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = r\omega\dot{\hat{\phi}} = -r\omega^2\hat{r},$$

der vi brukte det andre resultatet i spm *b*.

d) Vi finner direkte:

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}).$$

e) Med $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{z}$ og $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$ har vi

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \omega r\hat{z}\times\hat{r} = \omega r\hat{\phi}$$

og

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \omega\hat{z}\times\omega r\hat{\phi} = \omega^2 r(\hat{z}\times\hat{\phi}) = -\omega^2 r\hat{r}.$$

Oppgave 2

a) Vi legger inn et koordinatsystem med origo på kanten av startrampa. Høyden til syklisten som funksjon av tiden er da

$$z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

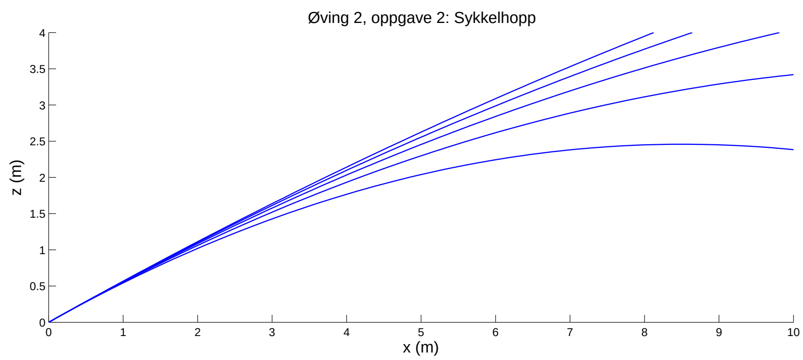
der $v_{0z} = v_0 \sin\theta$ og $g = 9.81$ m/s^2 er tyngdens akselerasjon. Horisontal hastighetskomponent $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta$ er uendret under hoppet, slik at tiden t som syklisten bruker på en horisontal strekning x finnes fra

$$v_{0x} = \frac{x}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{x}{v_0 \cos\theta}.$$

Dette uttrykket for t settes inn i $z(t)$, og vi får

$$z = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\theta \, \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}.$$

Figuren nedenfor framkommer ved å kjøre programmet sykkelhopp.m slik det er gitt, dvs med $L = 10$ m, $h = 4$ m, $\theta = 30°$ og hastighetene 50, 60, 70, 80 og 90 km/h:



b) Et vellykket hopp innebærer at $z(L) > h$. Vi setter $x = L$ i $z(x)$ og løser ulikheten mhp v_0. Det gir

$$v_0^2 > \frac{gL^2}{2\cos^2\theta(L\tan\theta - h)} \qquad \Rightarrow \qquad v_0 > \frac{L}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(L\tan\theta - h)}}.$$

Fra figuren ovenfor ser det ut til at minimumshastigheten er i underkant av 70 km/h. Innsetting av verdier fra a) gir:

$$v_0^{\min} = \frac{10.0\,\mathrm{m}}{\cos 30°}\sqrt{\frac{9.81\,\mathrm{m/s^2}}{2\cdot(10.0\,\mathrm{m}\cdot\tan 30° - 4.0\,\mathrm{m})}} = 19.2\,\mathrm{m/s} = 69\,\mathrm{km/h}.$$

c) Skal v_0 i spm b ha en løsning, må rotuttrykket være positivt, dvs

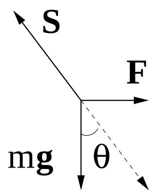
$$L\tan\theta - h > 0 \qquad \Rightarrow \qquad h < L\tan\theta.$$

Dette innser vi uten videre: Hvis farten er uendelig stor, vil syklisten følge en rett linje i fortsettelsen av startrampa. I avstand L fra rampa er høyden da $h_{\max} = L\tan\theta$ over startposisjonen. Dette er den maksimale høyden som kan oppnås. Med endelig hastighet v_0 vil syklisten falle litt under svevet, og høyden må alltid bli mindre enn $h_{\max} = L\tan\theta$.

d) Under svevet er syklisten i fritt fall, og akselerasjonen er da alltid $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ rett nedover.

Oppgave 3

a)



Vi har her et eksempel på statisk likevekt. Newtons 2. lov gir da at $\boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{S} = 0$, dvs $\boldsymbol{F}$ og $m\boldsymbol{g}$ balanseres av strekket i stanga, $\boldsymbol{S}$, som peker *langs stanga*. (Hvor opplagt er egentlig det...?) Dermed må også summen av $\boldsymbol{F}$ og $m\boldsymbol{g}$ peke langs stanga, som vist på figuren. Derav følger at

$$\tan\theta = \frac{F}{mg} \qquad \Rightarrow \qquad F = mg\tan\theta.$$

b) Kula roterer i horisontalplanet. Det er ingen bevegelse vertikalt, og dermed heller ingen akselerasjon vertikalt. Dermed må vertikalkomponenten av strekket i stanga, $S\cos\theta$, akkurat balansere tyngdekraften mg. Horisontalt er det kun horisontalkomponenten av strekket i stanga, $S\sin\theta$, som virker på kula. Dette må derfor også være lik sentripetalkraften $mv^2/r = m\omega^2 r$ som holder kula i sirkulær bane. Vi har altså de to ligningene

$$\begin{aligned} S\cos\theta &= mg, \\ S\sin\theta &= m\omega^2 r = m\omega^2 L\sin\theta, \end{aligned}$$

og eliminasjon av S (ved å dele den første ligningen med den andre) gir

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arccos\frac{g}{\omega^2 L}.$$

Vi vet at $|\cos\theta| \leq 1$. Med gitt verdi for L (og g) må derfor ω være større enn minimumsverdien

$$\omega_{\min} = \sqrt{g/L}$$

for at stanga og kula skal rotere med vinkel $\theta > 0$. Hvis systemet roterer med $\omega \leq \omega_{\min}$, vil stanga og kula henge rett ned. Helt til slutt kan vi jo registrere at meget rask rotasjon, $\omega \gg \sqrt{g/L}$, gir $\cos\theta \simeq 0$, dvs $\theta \simeq \pi/2$, og stanga peker praktisk talt horisontalt utover. Ikke uventet!

c) Kula og flyet har lik akselerasjon a, ellers ville vinkelen θ forandre seg. Kulas situasjon er den samme som i spm a, bortsett fra at det *ikke* virker noen kraft $\boldsymbol{F}$ rettet mot høyre. Vertikal kraftbalanse (pga ingen bevegelse og dermed heller ingen akselerasjon vertikalt) gir

$$S\cos\theta = mg.$$

Horisontalt er det horisontalkomponenten av strekket i stanga, $S\sin\theta$, som virker på kula, og som gir kula en lineær akselerasjon a:

$$S\sin\theta = ma.$$

Divisjon av den siste med den første eliminerer S og gir

$$\tan\theta = a/g \qquad \Rightarrow \qquad a = g\tan\theta = 9.81/\sqrt{3} = 5.7\,\mathrm{m/s^2}.$$

Oppgave 4.

a) Siden partikkelen følger en sirkulær bane, vil det alltid være en komponent av akselerasjonen rettet inn mot sirkelens sentrum (sentripetalakselerasjonen). Her øker dessuten hastigheten, så akselerasjonen må også ha en komponent tangentielt til sirkelbanen. Vektorsummen av normal- og tangentialkomponenten blir en total akselerasjon $\boldsymbol{a}$ med retning på skrå innover, som i B.

b) Legemet beveger seg med konstant positiv hastighet til å begynne med, deretter bremses det ned, før det snur og til slutt beveger seg med konstant negativ hastighet. Konstant fart betyr null akselerasjon, nedbremsing betyr negativ akselerasjon. Figur C passer bra med dette.

c) Prosjektil A er lengst tid i lufta. Vertikalbevegelsen, $z(t)$, beskrives ved

$$z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

jf oppgave 2. Landingstidspunktet er gitt ved $z = 0$, dvs $t = 2v_{0z}/g$. Med andre ord, lengre tid i lufta jo større vertikalkomponent av starthastigheten v_0.

LaTeX-trening:

- ```
  \documentclass[11pt]{article}
  \begin{document}
  \begin{eqnarray*}
  \hat{r}(t)    &=&  \hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t,  \\
  \hat{\phi}(t) &=& -\hat{x} \sin \omega t + \hat{y} \cos \omega t.
  \end{eqnarray*}
  \end{document}
  ```

- ```
  \documentclass[11pt]{article}
  \begin{document}
  For derivasjon med hensyn p{\aa} tiden $t$ brukes gjerne notasjonen
  $$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad {\rm og} \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$
  som standard.
  \end{document}
  ```