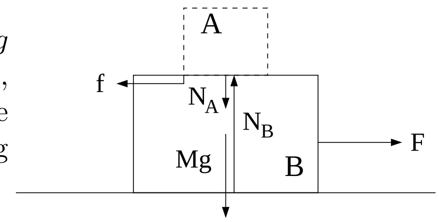
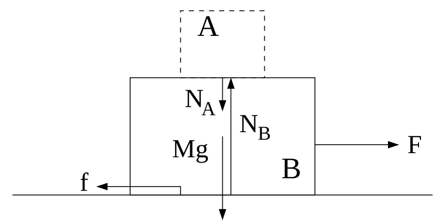
Løsningsforslag til øving 3

Oppgave 1

a) De vertikale krefter på B er tyngdekraft, Mg, normalkraft $N_A = mg$ fra A pga tyngden til A, og normalkraft N_B fra underlaget og oppover, $N_B = N_A + Mg = (m + M)g$. (Alle krefter gitt som absoluttverdi.) De horisontale krefter på B er trekkraften F og friksjonskraften f mellom A og B, som på B virker motsatt av trekkraften.



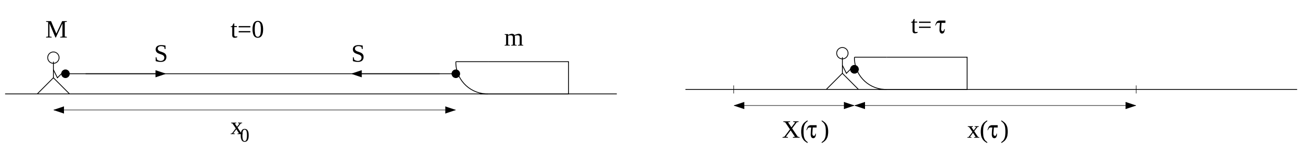
b) De vertikale kreftene er som i a). Når klossene beveges med konstant fart, er nettokraften på kloss A (og kloss B) lik null, dvs ingen horisontal (friksjons)kraft mellom A og B. Med friksjon mellom B og underlaget blir det en horisontalkraft f på B ved underlaget som nå er motsatt lik trekkraften, $f = F$.



Akselerasjonen i a) kan beregnes ved å betrakte begge klossene samlet: A og B har samme akselerasjon a, og totalkraften er F (friksjonskreftene mellom A og B er ikke ytre krefter; de er indre krefter i systemet A+B, motsatt rettet og like store i absoluttverdi (N3!), og bidrar ikke til totalkraften F). Newtons 2. lov (N2) gir $\underline{a = F/(m + M)}$.

Alternativt kan akselerasjonen i a) beregnes fra N2 på kloss B alene: $F - f = Ma$. Friksjonskraften f er eneste horisontalkraft på A (rettet mot høyre, dvs samme fortegn som F) og bestemmes ved N2 på A: $f = ma$. Dette gir som over $\underline{a = F/(m + M)}$.

Oppgave 2



a) Den eneste horisontale kraften som virker på gutten og kjelken er snorkraften, S. N2 gir:

$$S = MA \quad \Rightarrow \quad A = \underline{S/M} \qquad\qquad S = ma \quad \Rightarrow \quad a = \underline{S/m}$$

b) Initialbetingelsene for guttens bevegelse er $V(0) = 0$ og $X(0) = 0$, og vi får følgende uttrykk for guttens tilbakelagte veistrekning $X(t)$:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t A\,dt = At \quad \Rightarrow \quad X(t) = X(0) + \int_0^t V(t)\,dt = \int_0^t At\,dt = \frac{1}{2}At^2.$$

På samme måte får vi uttrykk for tilbakelagt veistrekning $x(t)$ for kjelken:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2.$$

Gutten og kjelken møtes ved tidspunktet $t = \tau$. De har da beveget seg følgende veistrekning:

$$X(\tau) = \frac{1}{2}A\tau^2 = \frac{1}{2}\frac{S}{M}\tau^2 \quad (1)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{2}a\tau^2 = \frac{1}{2}\frac{S}{m}\tau^2 \quad (2)$$

Den totale veistrekningen er x_0:

$$x_0 = X(\tau) + x(\tau) = \frac{1}{2}\frac{S}{M}\tau^2 + \frac{1}{2}\frac{S}{m}\tau^2 = \frac{1}{2}S\,\tau^2\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}S\,\tau^2\frac{M+m}{Mm} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \qquad \tau^2 = \frac{2Mmx_0}{(M+m)S} \quad (4)$$

Ligning (4) innsatt i (1) gir:

$$X(\tau) = \frac{1}{2}\frac{S}{M}\tau^2 = \underline{\frac{m}{M+m}x_0} \quad (5)$$

Regneteknisk kunne vi gjort dette mye enklere: Da det ikke er noen ytre krefter, endres ikke massesenterets posisjon, og gutten og kjelken må møtes i massesenteret gitt ved

$$x_{\text{cm}} = \frac{X(0)M + x(0)m}{M+m} = \frac{0 \cdot M + x_0 m}{M+m} = x_0\frac{m}{M+m}.$$

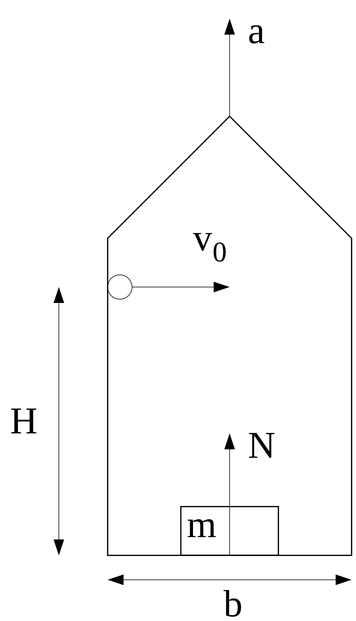
For $M \gg m$, dvs gutten mye tyngre enn kjelken, får vi fra (5):

$$X(\tau) \approx \frac{m}{M+0}x_0 = \frac{m}{M}x_0 \ll x_0 \qquad \text{Gutten står nesten i ro, noe som er rimelig.}$$

For $M \ll m$, dvs gutten mye lettere enn kjelken, får vi:

$$X(\tau) \approx \frac{m}{0+m}x_0 = x_0 \qquad \text{Kjelken står nesten i ro, noe som er rimelig.}$$

Oppgave 3



a) Eneste kraft som virker på legemet er normalkraften, N. N2 gir

$$N = ma.$$

b) I x-retning har ballen ingen akselerasjon. Initialbetingelsene $v_x(0) = v_0$ og $x(0) = 0$ gir følgende (se øving 1):

$$v_x(t) = v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 t.$$

Ballen treffer motsatt vegg ved $t = t_2$:

$$x(t_2) = b = v_0 t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = b/v_0. \quad (6)$$

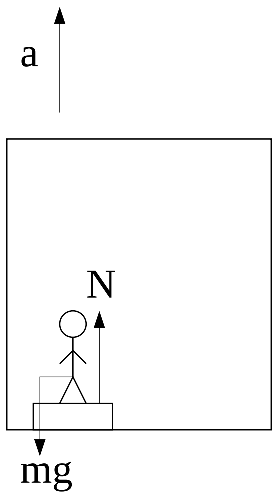
I y-retning har romskipet en akselerasjon a mens ballen har ingen akselerasjon. Men når vi velger romskipet som referansesystem og merker oss at dette ikke er et inertialsystem, vil ballen ha en akselerasjon $-a$ (dvs nedover). Ved å legge et koordinatsystem med origo i det punktet vi kaster ballen fra, er initialbetingelsene $v_y(0) = 0$ og $y(0) = 0$. Dette gir følgende:

$$v_y(t) = -at \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0 - \frac{1}{2}at^2 \quad (7)$$

Ligning (6) innsatt i (7) gir hvor langt ballen har falt:

$$\Delta y = y(t_2) - 0 = -\frac{1}{2}a\left(\frac{b}{v_0}\right)^2. \tag{8}$$

c) Det er ikke mulig for en innestengt observatør å avgjøre om kraften skyldes en tilsynelatende kraft i et akselerert system eller en reell (tyngde-)kraft i et inertialsystem. Når akselerasjonen er $a = g = 9.81$ m/s^2, kan observatøren like godt tro hun står stille på jordoverflaten.



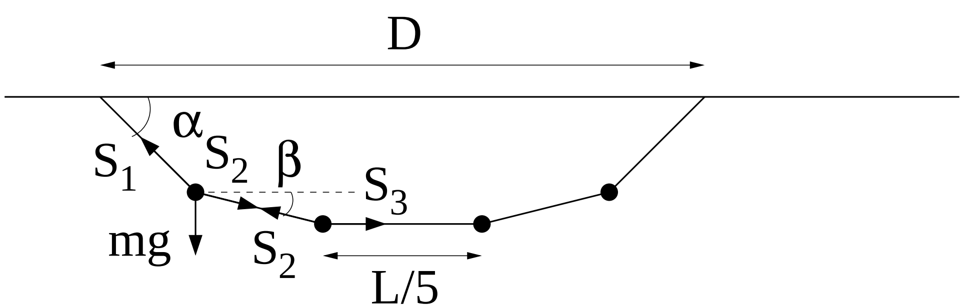
Oppgave 4

Symbolbruk: Mannens masse = m = 75 kg, mannens tilsynelatende masse i heisen = m_{iheis} = 85 kg.

Systemet må tydeligvis akselerere oppover siden mannens vekt er økt. Mannen og heisen må ha samme akselerasjon, a, og denne beregnes fra N2 på mannen. Normalkraften (som vekta viser) virker oppover og er lik $N = gm_{\text{iheis}}$. Tyngden virker nedover, slik at vi får

$$\begin{aligned} N - mg &= ma \\ \Rightarrow\ a &= \frac{N}{m} - g = \frac{g \cdot m_{\text{iheis}}}{m} - g = g \cdot \left(\frac{m_{\text{iheis}} - m}{m}\right) \\ &= 9.81\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{10}{75} = 1.308\,\text{m/s}^2 = \underline{1.3\,\text{m/s}^2}. \end{aligned}$$

Oppgave 5



Vi kaller snordraget i 1., 2. og 3. snorbit regnet fra et festepunkt for hhv S_1, S_2 og S_3 (se figuren over). N1 for 1. og 2. masse, horisontalt og vertikalt, gir da i alt

$$\begin{aligned} S_1 \cos\alpha &= S_2 \cos\beta \\ S_1 \sin\alpha &= S_2 \sin\beta + mg \\ S_2 \cos\beta &= S_3 \\ S_2 \sin\beta &= mg \end{aligned}$$

Ligning nr 5 uttrykker at horisontale forflytninger langs snora summerer seg til D:

$$\frac{L}{5}\left(1 + 2\cos\beta + 2\cos\alpha\right) = D.$$

Kombinasjon av 2. og 4. ligning gir $S_1 \sin\alpha = 2S_2 \sin\beta$, som kominert med 1. ligning gir

$$\tan\alpha = 2\tan\beta \quad \text{dvs} \quad \beta = \arctan(\frac{1}{2}\tan\alpha).$$

Bruker vi $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ og tilsvarende med β, finner vi

$$\cos\beta = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}.$$

Dette setter vi inn i ligning nr 5 ovenfor og får

$$\frac{L}{5}\left(1 + \frac{4\cos\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}} + 2\cos\alpha\right) = D.$$

For å kunne bruke det utdelte MATLAB-programmet og bestemme α numerisk (for gitte verdier av L og D, selvsagt), må denne ligningen omformes til $x = f(x)$, med $x = \cos\alpha$. I første omgang ser det meget naturlig ut å multiplisere med $5/L$ og trekke fra 1 på begge sider. Hvis vi så definerer $\gamma = (5D/L - 1)/2$, har vi (minst) tre åpenbare muligheter:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\gamma}{1 + 2/\sqrt{1+3x^2}}, \\
x &= \gamma - \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}, \\
x &= \frac{1}{2}\sqrt{1+3x^2}\,(\gamma - x)\,.
\end{aligned}$$

Algoritmen (se f.eks. Fixed-point iteration på wikipedia) i klessnor.m fungerer fint med alle disse tre. Til slutt kan vi gå tilbake til de opprinnelige ligningene og løse ut for S_1, S_2 og S_3 mhp x. Vi finner:

$$\begin{aligned}
\frac{S_1}{mg} &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \\
\frac{S_2}{mg} &= \sqrt{\frac{1+3x^2}{1-x^2}}, \\
\frac{S_3}{mg} &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Er disse uttrykkene rimelige? Vel, vi ser for det første at når $x \to 1$, dvs $\alpha \to 0$, dvs horisontal snor, så blir alle snordrag uendelig store. Ikke urimelig. Videre ser vi at $S_1 > S_2 > S_3$ hvis $x < 1$. Ved litt ettertanke heller ikke urimelig.

I programmet

`klessnor_los.m`

bestemmes begge vinkler og de tre snordragene, med $D = 0.9L$.

Til slutt kan det jo bemerkes at ei homogen snor, dvs med konstant massetetthet (masse pr lengdeenhet), vil henge med form som en hyperbolsk cosinus. Ei slik homogen snor skulle tilsvare at vi hengte N like store masser på snora, i innbyrdes avstand $L/(N+1)$, og lot $N \to \infty$. Det kunne jo være passende tidtrøyte å studere dette litt nærmere, både analytisk og numerisk, hvilket herved overlates til den enkelte.

Viktig poeng med disse oppgavene: Isoler del(er) av systemet, erstatt omgivelsene med krefter og benytt Newtons 1. eller 2. lov.