FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.

Løsningsforslag til øving 4

Oppgave 1

ϕ	S/g (g)	μ
0	185	
$\pi/2$	240	0.166
π	300	0.154
$3\pi/2$	440	0.184
2π	600	0.187
$5\pi/2$	800	0.186
3π	1000	0.179
$7\pi/2$	1100	0.162
4π	1400	0.161

Tabell: Maksimal snorkraft S og statisk friksjonskoeffisient μ, med snor surret en vinkel ϕ rundt plastrøret.

Fra det oppgitte uttrykket for $S(\phi)$ har vi

$$\mu = \frac{1}{\phi} \ln \frac{S(\phi)}{S(0)}$$

når $S(\phi)$ er største tillatte snorkraft for å holde loddet med masse $m = S(0)/g$ i likevekt (dvs i ro). Middelverdien av μ blir (se ligning (4-25) i labheftet)

$$\overline{\mu} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} \mu_i \simeq 0.172,$$

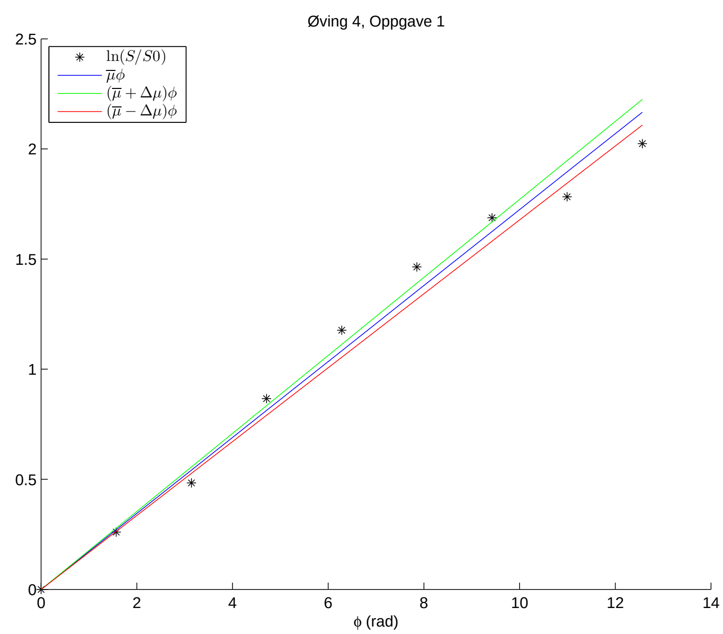
mens standardfeilen blir (se ligning (4-27) i labheftet)

$$\Delta\overline{\mu} = \sqrt{\frac{1}{8 \cdot 7} \sum_{i=1}^{8} (\mu_i - \overline{\mu})^2} \simeq 0.0046.$$

Dermed:

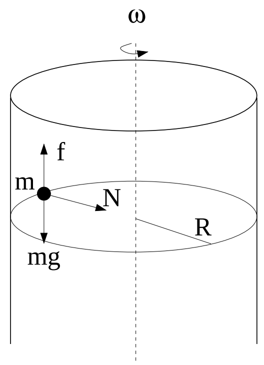
$$\mu = 0.172 \pm 0.005.$$

La oss til slutt plotte de 9 målepunktene for $\ln S/S(0)$ sammen med de rette linjene $\mu\phi$, for $\mu = \overline{\mu}$ samt $\mu = \overline{\mu} \pm \Delta\overline{\mu}$:



Matlab-programmet eksp_friksjon.m leser ϕ og S/g fra fila eksp_friksjon.txt, regner ut $\overline{\mu}$ og $\Delta\mu$, og lager figuren ovenfor. Legg merke til bruken av LaTeX.

Oppgave 2



De kreftene som virker på legemet er tyngden, normalkraften og friksjonskraften, som vist i figuren. Friksjonskraften f virker oppover for å hindre at massen glir nedover. I vertikal retning har vi kraftbalanse:

$$f = mg.$$

I horisontalplanet bruker vi Newtons 2. lov, uttrykket for sentripetalakselerasjonen og at $v = \omega R$:

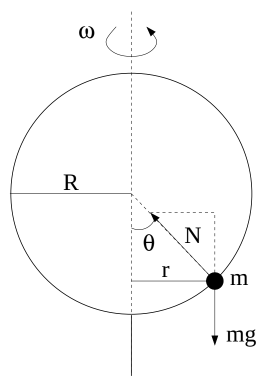
$$N = ma = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Betingelsen $f \leq \mu N$ gir sammen med de to ligningene ovenfor:

$$f = mg \leq \mu N = \mu m \omega^2 R \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega \geq \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}}.$$

Jo mindre μ, desto større rotasjonshastighet er nødvendig (naturligvis).

Oppgave 3



Når kula er i likevekt (i det roterende referansesystemet), roterer den med ringen i en avstand $r = R\sin\theta$ fra rotasjonsaksen (se figuren). Rotasjonshastigheten er: v =(omkrets)/(omløpstid) $= (2\pi r)/(2\pi/\omega) = \omega r$.

a) To krefter virker på kula: Tyngdekraften mg (vertikalt nedover) og normalkraften fra underlaget N (rettet inn mot ringens sentrum).

b) Vertikalt er det ingen akselerasjon, slik at summen av krefter vertikalt må være lik null:

$$mg = N\cos\theta \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\theta}.$$

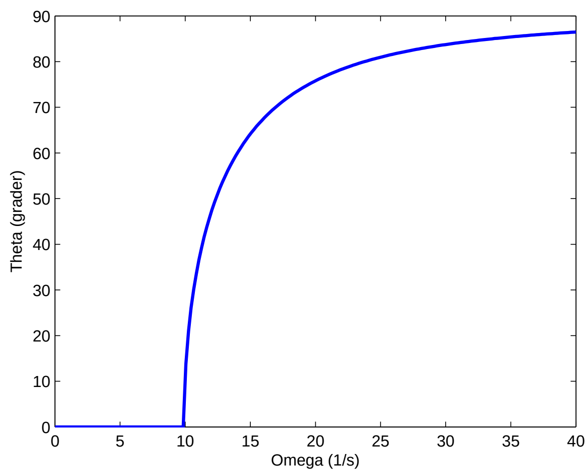
I horisontal retning har vi sentripetalakselerasjon $a = \omega^2 r = \omega^2 R\sin\theta$, og den eneste kraften som kan bidra til dette er komponenten av N horisontalt. Derfor:

$$ma = N\sin\theta \quad \Rightarrow \quad m\omega^2 R\sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta}\cdot\sin\theta.$$

Under forutsetning av at $\sin\theta$ er forskjellig fra null, dvs $\theta \neq 0$, kan vi dividere med $\sin\theta$ på begge sider. Dette gir likevektsvinkelen for gitt ω:

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R} \qquad \text{og dermed} \quad \underline{\theta(\omega) = \arccos\frac{g}{\omega^2 R}} \qquad (\omega = 2\pi f = 2\pi/T).$$

c) Til høyre finner du et forslag til Matlabprogram som regner ut og plotter $\theta(\omega)$. Hvis ω er mindre enn $\sqrt{g/R}$, er $\theta = 0$. Det er tatt høyde for dette i programmet. Den resulterende grafen er vist nedenfor. (Strengt tatt er $\theta = 0$ en løsning også for $\omega > \sqrt{g/R}$, men representerer da en ustabil likevekt: En aldri så liten forstyrrelse bort fra $\theta = 0$ vil føre til at kula beveger seg utover på ringen.)




```
%FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk hosten 2012.
%Oving 4, Oppgave 3c.
clear all;
%N = antall punkter langs omega-aksen
N = 200;
%g = tyngdens akselerasjon
g = 9.81;
%R = ringens radius
R = 0.10;
%tabell
omega_max = 40;
theta_max = pi/2;
omega = linspace(0.0,omega_max,N);
for i = 1:N
    nevner(i) = R*omega(i).^2;
    if nevner(i) < g
        theta(i) = 0.0;
    else
        theta(i) = acos(g/nevner(i));
    end;
end;
% Plotter omega(theta)
plot(omega,theta*180/pi,'linewidth',2);
axis([0.0 omega_max 0.0 theta_max*180/pi]);
% Aksetekster:
xlabel('Omega (1/s)');
ylabel('Theta (grader)');
```

Oppgave 4

I denne oppgaven er ikke akselerasjonen konstant slik at konstant-a-ligningene $v = at$ og $s = at^2/2$ ikke kan brukes.

a) Akselerasjonen til partikkelen er gitt av:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m}e^{-t/T}.$$

Siden $a = dv/dt$, kan vi skrive $dv = adt$ for hastighetsendringen i løpet av et lite tidsintervall dt. Vi integrerer denne og bruker initialbetingelsen $v(0) = 0$. La oss for ordens skyld bruke t' som integrasjonsvariabel for å skille den fra øvre integrasjonsgrense t.

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')\,dt' = \left[\frac{-F_0T}{m}e^{-t'/T}\right]_0^t = \frac{F_0T}{m}\left(1 - e^{-t/T}\right).$$

For $t = T$ får vi

$$v(T) = \underline{\frac{F_0T}{m}\left(1 - e^{-1}\right)}.$$

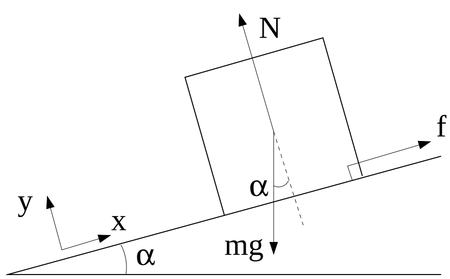
b) For å finne posisjonen integrerer vi $dx = vdt$ og bruker betingelsen $x(0) = 0$. (Merk at det ikke er nok å finne bare $v(T)$ i *a*). Vi må finne $v(t)$ for å muliggjøre videre integrasjon her i *b*).)

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')\, dt' = \frac{F_0 T}{m} \left[t' + Te^{-t'/T}\right]_0^t = \frac{F_0 T}{m} \left[t + T(e^{-t/T} - 1)\right].$$

For $t = T$:

$$x(T) = \underline{\frac{F_0 T^2}{m} e^{-1}}.$$

Oppgave 5



De kreftene som virker på kassa er tyngden, normalkraften og friksjonskraften, som vist i figuren. Friksjonskraften må ha retning oppover for å holde kassa på plass og gi akselerasjon oppover bakken. Vi legger koordinatsystemet som vist i figuren. Akselerasjonen er i x-retning, slik at det er null akselerasjon i y-retning og dermed kraftbalansen:

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

I x-retning bruker vi Newtons 2. lov:

$$f - mg\sin\alpha = ma.$$

Friksjonskraften f er maksimalt lik μN. Hvis akselerasjonen er så stor at f måtte overstige denne verdien, vil kassa gli. Grensen er altså ved

$$f = \mu N = \mu mg\cos\alpha\,.$$

Kombinerer vi dette med at $a = f/m - g\sin\alpha$, finner vi

$$a_{\max} = \mu g\cos\alpha - g\sin\alpha.$$

Med oppgitte tallverdier:

$$a_{\max} = (0.40 \cdot \cos 15^\circ - \sin 15^\circ) \cdot 9.81\ \mathrm{m/s^2} = \underline{1.25\ \mathrm{m/s^2}}.$$

Ukens LaTeX

```
\documentclass[11pt]{article}
\begin{document}
\begin{tabular}{crr}
\hline
$\phi$ & $S/g$ (g) & $\mu$ \\
\hline
$0$      &  185  &  \\
$\pi/2$  &  240  & 0.166 \\
$\pi$    &  300  & 0.154 \\
$3\pi/2$ &  440  & 0.184 \\
$2\pi$   &  600  & 0.187 \\
$5\pi/2$ &  800  & 0.186 \\
$3\pi$   & 1000  & 0.179 \\
$7\pi/2$ & 1100  & 0.162 \\
$4\pi$   & 1400  & 0.161 \\
\hline
\end{tabular}

\vspace{0.5cm}
{\bf Tabell}: {\sf Maksimal snorkraft $S$ og statisk friksjonskoeffisient $\mu$,
med snor surret en vinkel $\phi$ rundt plastr{\o}ret.}
\end{document}
```

Enda litt penere blir det nok hvis man sentrerer teksten over 2. og 3. kolonne.