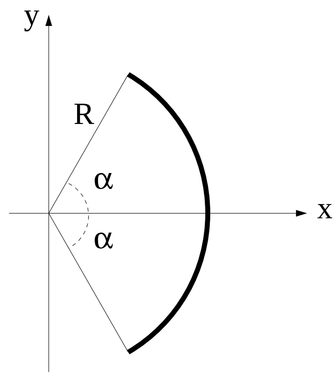
FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.
Veiledning: 9. - 12. oktober. Innleveringsfrist: Onsdag 17. oktober kl 14.

Øving 7

Oppgave 1: Tyngdepunkt



a) En tynn, jevntykk bøyle er en del av en sirkel og har sektorvinkel 2α, som vist i figuren. Sirkelradien er R. Vis at tyngdepunktet er

$$X = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

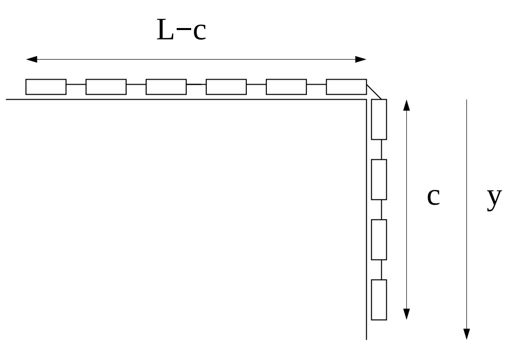
Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \to 0$? Er svarene rimelige?

b) Bøylen erstattes av en sirkelsektor (dvs ei tynn, jevntykk skive) med samme åpningsvinkel 2α og radius R. Vis at tyngdepunktet er

$$X = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \to 0$? Er svarene rimelige?

Oppgave 2: Lenke over kanten av et bord



En lenke med mange små ledd henger utover en bordkant. Lenkens totale lengde er L, massen er m, og en lengde y henger til enhver tid utenfor bordkanten. Lenken holdes initielt i ro med en lengde $y = c$ utenfor bordkanten. Så slippes lenken slik at den begynner å gli, med økende hastighet $v(y)$. Antall ledd er mye større enn antydet i figuren, slik at lenken kan betraktes som kontinuerlig. Vi antar at det ikke er friksjon mellom lenken og den horisontale bordflaten. Bestem hastigheten $v(L)$ til lenken idet siste ledd glir over bordkanten. Tips: Differensialligning i v og y fra N2, med $\dot{v} = v \cdot dv/dy$. Alternativ: Energibevarelse. Sistnevnte metode er nok enklest, men prøv gjerne begge to.

Oppgave 3: Saturn V, trinn 1

Rakett-typen som blant annet sørget for å bringe Apollo 11 fra jorda til månen i juli 1969 kalles Saturn V. I det første av i alt tre rakett-trinn ble 13.2 tonn drivstoff forbrent pr sekund og blåst ut bakover med en hastighet 2.58 km/s relativt raketten. Etter 2.5 minutter var alt drivstoff i trinn 1 brukt opp. Oppskytingen startet med raketten i ro på bakken, der tyngdens akselerasjon er $g = 9.81$ m/s^2. Total masse før avreise var $3.04 \cdot 10^6$ kg.

a) Bruk "rakettligningen" (utledet i forelesningene)

$$ma = F_{\mathrm{ytre}} + F_{\mathrm{skyv}}$$

til å vise at rakettens hastighet etter en tid t blir

$$v(t) = u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Her er m_0 startmassen, mens $m = m(t)$ er gjenværende masse ved tidspunktet t. Vi har valgt positiv retning oppover, slik at ytre kraft på raketten er $-mg$. Skyvkraften er $u\beta$, der u er eksosens hastighet relativt raketten og $\beta = -dm/dt$ angir forbrent masse pr tidsenhet. Her er både u og β definert som positive størrelser, og vi antar at de begge er konstante, som antydet innledningsvis.

b) Hvor stor må skyvkraften minst være for at raketten i det hele tatt skal ta av fra bakken? Sjekk at dette var tilfelle for Saturn V. Regn ut drivstoffmassen m_d ved avreise, $t = 0$, og rakettens sluttmasse m_f ved tidspunktet t_f, dvs idet alt drivstoff er brukt opp.

c) Vis at rakettens akselerasjon kan skrives som

$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0 - \beta t} - g.$$

Bestem akselerasjonen ved $t = 0$. Bestem også akselerasjon og hastighet ved slutten av trinn 1, dvs ved $t = t_f$.

d) Det oppgis at dersom $|x| \ll 1$, er det en god tilnærmelse å erstatte brøken $1/(1-x)$ med polynomet $1 + x$. (Prøv for eksempel med $x = 0.01$.) Bruk Rottmann til å verifisere at $1/(1-x) \simeq 1 + x$ når $|x| \ll 1$. Bruk deretter denne opplysningen til å vise at

$$a_{\mathrm{lin}}(t) = a(0) + \frac{u\beta^2}{m_0^2}\, t$$

er en god tilnærmelse for $a(t)$ så lenge $t \ll m_0/\beta$. Ta utgangspunkt i Matlab-programmet rakett.m og modifiser linjene 25 og 48 slik at du får plottet $a(t)$ og $a_{\mathrm{lin}}(t)$ i samme figur, for $0 < t < t_f$. Anslå på øyemål ved hvilket tidspunkt $a_{\mathrm{lin}}(t)$ begynner å bli en "mindre god" tilnærmelse for $a(t)$. Modifiser videre linje 27 slik at du får plottet $v(t)$ i en annen figur. (For innlevering, lagre figurene i pdf-format og send som vedlegg pr epost til din studass.)

e) (Utfordring?) Hvor høyt, h_f, kommer raketten i løpet av dette første oppskytingstrinnet? Raketten trekkes mot jorda med gravitasjonskraften

$$F_G = \frac{GMm}{r^2},$$

der G er gravitasjonskonstanten, M er jordmassen, m er rakettmassen og r er avstanden mellom raketten og jordas sentrum. Anta at jorda er kuleformet med radius $R = 6.37 \cdot 10^3$ km. Hvis du har regnet riktig, har du kommet fram til at h_f er i underkant av 60 km. Bruk disse verdiene til å anslå hvor stor feil du har gjort underveis i dine regninger ved å bruke den konstante verdien 9.81 m/s^2 for tyngdens akselerasjon.

Noen fasitsvar:

2: $v(L) = \sqrt{g(L^2 - c^2)/L}$ 3b: 29.8 MN, $1.98 \cdot 10^6$ kg, $1.06 \cdot 10^6$ kg

3c: 1.39 m/s^2, 22.3 m/s^2, 1.25 km/s 3e: 58.4 km, feilen i $g(h_f)$ er ca 2 %