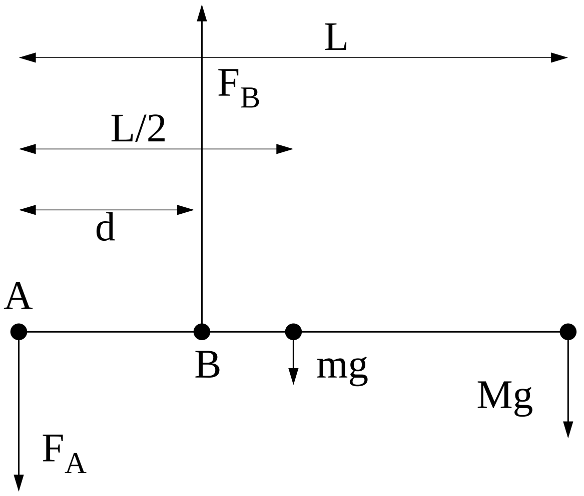
FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2012.

Løsningsforslag til øving 9

Oppgave 1



Stupebrettet er i ro, dvs vi har statisk likevekt. Det betyr at summen av alle krefter i vertikal retning er null og at dreiemomentet om enhver akse er lik null. Vi ser da umiddelbart at kraften F_A er rettet nedover for å gi null dreiemoment om B. Vi ser videre at kraften F_B er rettet oppover for å gi null dreiemoment om A. Vi velger her først å beregne dreiemomentene om A. Kraften F_A har da null arm og dermed null dreiemoment. Dreiemomentene pga tyngdekreftene er negative siden de prøver å dreie *med klokka* om A. Tyngdekraften for stupebrettet angriper i tyngdepunktet som ligger i avstand $L/2$ fra A. Dreiemomentet pga F_B er positivt siden det prøver å dreie *mot klokka* om A. Totalt dreiemoment om A lik null gir

$$
\begin{aligned}
0 &= F_A \cdot 0 - mg\frac{L}{2} - MgL + F_B d \\
F_B &= \frac{gL}{d}\left(M + \frac{m}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Kraftbalanse i vertikal retning gir (med positiv retning valgt oppover)

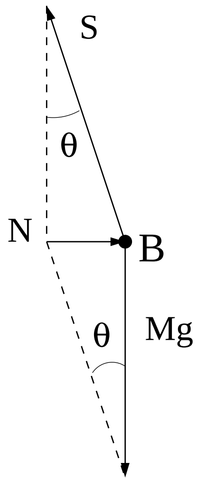
$$
\begin{aligned}
0 &= -F_A - mg - Mg + F_B \\
F_A &= F_B - (m+M)g = \frac{gL}{d}\left(M + \frac{m}{2}\right) - (m+M)g
\end{aligned}
$$

La oss bruke dreiemomentbalanse om B til å kontrollere at vi har riktig uttrykk for F_A:

$$
\begin{aligned}
\tau_B &= F_A d - mg\left(\frac{L}{2} - d\right) - Mg(L-d) \\
&= gL\left(M + \frac{m}{2}\right) - (m+M)gd - mg\left(\frac{L}{2} - d\right) - Mg(L-d) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ser bra ut!

Oppgave 2



a) Det er tre krefter som virker på ballen, snordraget S, tyngdekraften $G = Mg$ og normalkraften fra veggen, N. Ballen er i ro, dvs i statisk likevekt. Da må f.eks det totale dreiemomentet om ballens tyngdepunkt B være null. Både N og G har null arm mhp en akse gjennom B, og bidrar derfor ikke til τ_B. Da kan heller ikke S gi noe dreiemoment om B, og snoras forlengelse må passere gjennom B.

La oss kalle vinkelen mellom veggen og snora for θ. Null nettokraft på ballen horisontalt gir da

$$N - S\sin\theta = 0,$$

mens null nettokraft vertikalt gir

$$S\cos\theta - Mg = 0.$$

Siden snoras forlengelse går gjennom B, har vi

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{(L+R)^2 - R^2}}{L+R} = \frac{\sqrt{L(L+2R)}}{L+R}$$

og

$$\tan\theta = \frac{R}{\sqrt{L(L+2R)}},$$

slik at

$$S = \frac{Mg}{\cos\theta} = Mg\,\frac{L+R}{\sqrt{L(L+2R)}}$$

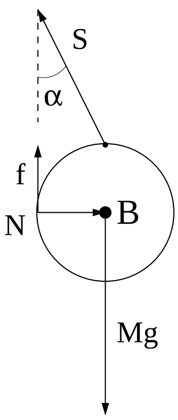
og

$$N = S\sin\theta = Mg\tan\theta = Mg\,\frac{R}{\sqrt{L(L+2R)}}.$$

Hvis snora er veldig lang, $L \gg R$, er $S \simeq Mg$ og $N \simeq 0$. Det er rimelig for en ball som henger i ei praktisk talt vertikal snor. Hvis snora er kort, $L \ll R$, blir både S og N store, og tilnærmet lik

$$S \simeq N \simeq Mg\sqrt{\frac{R}{2L}}.$$

Eksempelvis blir $S = N = 10Mg$ hvis $L = R/200$. (F.eks ball med radius 10 cm og snor med lengde 0.5 mm.) Litt friksjon mellom ball og vegg vil endre på dette.



b) La oss her kalle vinkelen mellom vegg og snor for α. Null dreiemoment om B gir da

$$S\sin\alpha \cdot R - f \cdot R = 0,$$

dvs

$$f = S\sin\alpha.$$

Maksimal friksjonskraft er $f_{\max} = \mu N$. Null nettokraft horisontalt gir da

$$N = S\sin\alpha = f = \mu N,$$

dvs $\mu = 1$, som akkurat gjør det mulig å ha snorfestet øverst på ballen.

Oppgave 3

a) Jojoens volum er

$$V = 2b \cdot \pi R^2 + a \cdot \pi r^2,$$

og dens masse pr volumenhet er $\mu = M/V$. Jojoens treghetsmoment er dermed

$$\begin{aligned} I_0 &= 2 \cdot \frac{1}{2}\mu \cdot b\pi R^2 \cdot R^2 + \frac{1}{2}\mu \cdot a\pi r^2 \cdot r^2 \\ &= \frac{M(b\pi R^4 + a\pi r^4/2)}{2b\pi R^2 + a\pi r^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{MaR^4(2b/a + r^4/R^4)}{aR^2(2b/a + r^2/R^2)} \\ &= \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{2\alpha + \beta^4}{2\alpha + \beta^2}. \end{aligned}$$

Spesialtilfeller:

- $\beta = 1$: Da er $c = 1$ og $I_0 = MR^2/2$ som det skal være for en kompakt sylinder med masse M og radius R.
- $a = 0$: Da vil $\alpha \to \infty$ og igjen er $c = 1$ og $I_0 = MR^2/2$. OK, fortsatt kompakt sylinder med masse M og radius R.
- $b = 0$: Da er $\alpha = 0$, og $c = \beta^2 = r^2/R^2$, slik at $I_0 = Mr^2/2$. OK: Denne gang har vi kompakt sylinder med radius r og masse M.

b) N2 for vertikal translasjon:

$$Mg - S = MA.$$

N2 for rotasjon om jojoens symmetriakse:

$$Sr = I_0\dot{\omega} = I_0 A/r.$$

Siste ligning gir

$$S = I_0 A/r^2,$$

som innsatt i første ligning gir

$$\begin{aligned} Mg - I_0 A/r^2 &= MA \\ A(M + I_0/r^2) &= Mg \\ A &= \frac{g}{1 + I_0/Mr^2} \end{aligned}$$

for jojoens akselerasjon. Innsetting av dette uttrykket for A gir for snordraget,

$$S = I_0 A/r^2 = \frac{Mg}{1 + Mr^2/I_0},$$

uten at vi vel var bedt spesifikt om å regne ut dette. Tallverdi for koeffisienten c med oppgitte dimensjoner:

$$c = \frac{2\alpha + \beta^4}{2\alpha + \beta^2} = \frac{2 + 1/8^4}{2 + 1/8^2} \simeq 1.$$

Videre er

$$\frac{I_0}{Mr^2} \simeq \frac{R^2}{2r^2} = \frac{1}{2\beta^2} = 32,$$

slik at

$$A \simeq g/33 \simeq 0.30\,\mathrm{m/s}^2.$$

Det betyr at jojoen bruker ca 2.6 s på å falle 1 m, dersom den starter med null hastighet. ($h = At^2/2$)

Oppgave 4

a) **A**. I vakuum er det ingen luftmotstand. De eneste kreftene som virker er tyngdekraften på hvert legeme, og alle legemer får samme akselerasjon, g.

b) **C**. Bruk Steiners sats, $I_1 = I_2 = I_0 + Md^2$ med $d = R_1 = R_2$.

c) **C**. I luftlinje i nord-syd-retning er det ca 40 mil mellom Oslo og Trondheim, dvs ca $4 \cdot 10^5$ m. Dette blir bilimpulsens "arm" a. Bilen har masse omlag 1000 kg og hastighet østover ca 25 m/s. Dreieimpulsen mhp et sted i Oslo sentrum blir dermed $L = mva \sim 1000 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 10^5 = 10^{10}$ kg m^2/s.

d) **D**. Normalt på skråplanet har tyngden komponent $mg\cos\theta$ og kraften F komponent $F\sin\theta$, begge i samme retning. N1 normalt på skråplanet gir at normalkraften må være lik summen av disse. Om klossen akselererer oppover har ingen betydning. Om det er friksjonskraft eller ei har heller ingen betydning. F vil riktignok ha ulike verdier, men relasjonen $N = mg\cos\theta + F\sin\theta$ gjelder alltid.

e) **A**. Vi har $\tau = I_0\dot{\omega}$, N2 for rotasjon om akse gjennom slipesteinens tyngdepunkt. Her er $\tau = Sr = 20 \cdot 0.25 = 5.0$ i SI-enheter. Dessuten er $\dot{\omega} = 60/12 = 5.0$, også i SI-enheter. Dermed må I_0 være lik 1.0, i SI-enheten kg m^2.

f) **B**. Ved fall uten luftmotstand øker kinetisk energi proporsjonalt med falt høyde, pga energibevarelse: Potensiell energi mgs overføres til kinetisk energi (kurve 1). Med luftmotstand vil noe av den potensielle energien tapes til friksjonsarbeid (dissipasjon), og den kinetiske energien øker mindre enn tilfellet uten luftmotstand. Det er da bare kurve 2 som er mulig.