

Størrelser og enheter. SI-systemet. [YF 1]

Eks: Tid, $T = 730 \text{ ms}$

fysisk størrelse \uparrow Tid, symbol \uparrow T , måltall \uparrow 730, enhet \uparrow ms

dekadisk prefiks (1 ms = 1 millisekund = 10^{-3} s)

Notasjon: $[T] = s$ ("enheten til tid er sekund")

| Størrelse | Vanlige symboler | Enhet | |
|-----------------------|------------------------|--------------------|-----------------------|
| tid | $t, T, \tau \dots$ | s | } Mekanikk |
| lengde | $l, s, \Delta x \dots$ | m | |
| masse | $m, M \dots$ | kg | |
| temperatur | T | K | } Termisk fys, Kjemi |
| stoffmengde | n | mol | |
| elektrisk strømstyrke | I | A | } Elmag |
| (lysstyrke) | I | cd | |
| <hr/> | | | |
| hastighet | $v, V \dots$ | m/s | } Sammensatte enheter |
| akselerasjon | $a, A \dots$ | m/s^2 | |
| kraft | F, f, S, \dots | $kgm/s^2 \equiv N$ | } Avledete enheter |
| trykk | p, P | $N/m^2 \equiv Pa$ | |
| energi | $E, W, K, U \dots$ | $Nm \equiv J$ | |
| effekt | P | $J/s \equiv W$ | |
| ⋮ | | | |

Dekadiske prefikser:

$10^{-12} = p = \text{piko}$, $10^{-9} = n = \text{nano}$, $10^{-6} = \mu = \text{mikro}$...

... $10^6 = M = \text{mega}$, $10^9 = G = \text{giga}$, $10^{12} = T = \text{tera}$

Eks: Hvor langt går lys i vakuum på et nanosekund?

Løsn: $v(\text{lys}) = c = 299792458 \text{ m/s}$

$\Rightarrow l = c \cdot t = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10^{-9} \text{ s} \approx \underline{0.30 \text{ m}}$

Eks: En studenthybel bruker ca 4 MWh el. energi pr år.
Hvor mye er dette i SI-enhet?

Løsn: $4 \text{ MWh} = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 144 \cdot 10^8 \text{ J} = \underline{14.4 \text{ GJ}}$

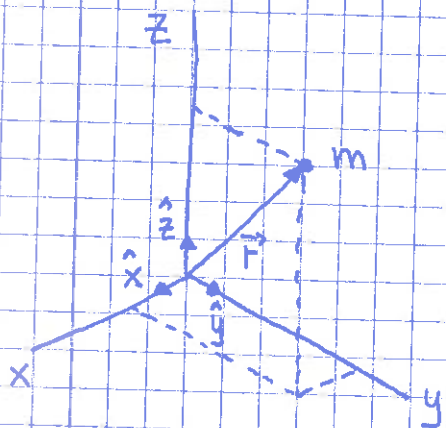
Hva er midlere effekt?

$P = 4 \cdot 10^6 \text{ Wh} / (365 \cdot 24 \text{ h}) \approx 457 \text{ W} \approx \underline{0.5 \text{ kW}}$

Kinematikk [YF 2, 3 ; LL 1]

"bevegelsesbeskrivelse"

Først punktmasser. [Senere støre legemer; rotasjon etc]



$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$
 $=$ posisjonen til m ved tid t
(målt i fast, høyrehendt
kartesisk koordinatsystem)

Ehetsvektorer: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$

$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$ (dimensjonsløse)

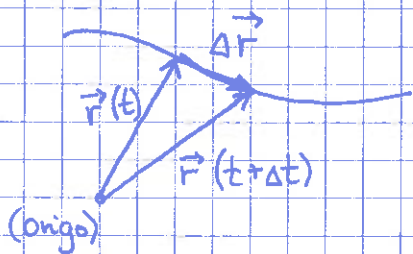
$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$

$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$

Beskriver beregelsen med banen $\vec{r}(t)$:

28.08.14

3



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

= forflytning på tida Δt

Hastighet ^(def) = forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$ (dvs \vec{v} er tangentiell til banen)
(Δt er skalar)

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Standard notasjon: $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ osv.

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}}$$

Komponentform (kartesisk):

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ d\vec{r}/dt &= \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} \text{ osv}$$

Tilsv: $a_x = \dot{v}_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$ osv

M.a.o: $\vec{r} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{a}$

Forventer: $\vec{a} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{r}$

Først 1D:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \Rightarrow dx = v_x dt \Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x \Rightarrow dv_x = a_x dt \Rightarrow \int_{v_x(t_0)}^{v_x(t)} dv_x = \int_{t_0}^t a_x(t) dt$$

$$\Rightarrow v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t) dt$$

Generalisering til 3D:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

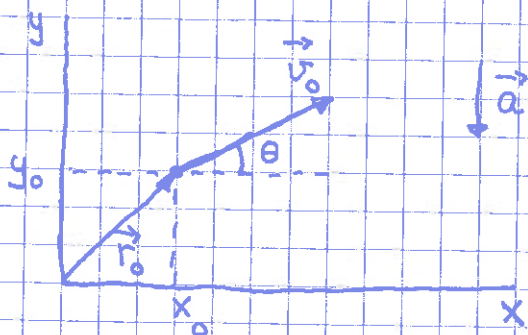
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

Eks: Kast.

Ved $t_0 = 0$:



Initialbetingelser:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

Konstant aks: $\vec{a} = -g \hat{y}$

- Bestem $\vec{r}(t)$
- Bestem $y(x)$

Løsn: Generelt, med $\vec{a} = \text{konst.}$

(5)

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a} dt = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t [\vec{v}_0 + \vec{a}t] dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$

Her: $\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y}$; $a_x = 0$, $a_y = -g$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta, \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

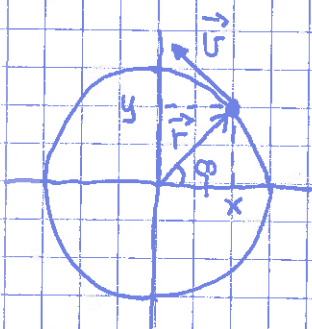
$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t \cos \theta; \quad y(t) = y_0 + v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Eliminasjon av t gir (gjør selv!)

$$y = y_0 + (x - x_0) \tan \theta - \frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}, \quad \text{dvs parabel}$$

Sirkelbevegelse

[YF 3.4; LL 1.7, 1.8]



Lurt med polaroord. (r, φ) :

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom x -aksen og \vec{r}

($\varphi > 0$ mot klokka)

Fra figuren: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\tan \varphi = y/x$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (= \text{konst. ved sirkelber.})$$

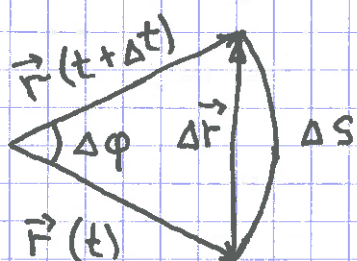
$$\vec{r} = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi$$

Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde/radius:

⑥



$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$$

Enheter: $[\varphi] = \left[\frac{s}{r}\right] = \frac{m}{m} = 1$; $[\omega] = \left[\frac{\varphi}{t}\right] = s^{-1}$

Når $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\Delta\varphi \rightarrow 0, \quad \Delta r = |\Delta\vec{r}| \rightarrow \Delta s = r\Delta\varphi, \quad \Delta\vec{r} \perp \vec{r}$$

Dermed:

$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r \, d\varphi}{dt} = \underline{r\omega}$$

$$\vec{v} \parallel \Delta\vec{r} \quad \text{og} \quad \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r}$$

Uniform sirkelbevægelse:

$$v = \text{konst.}, \quad \omega = \text{konst.}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \Rightarrow \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \omega \int_0^t dt \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t$$

$$\text{Velger } \varphi(0) = 0 : \quad \varphi(t) = \omega t$$

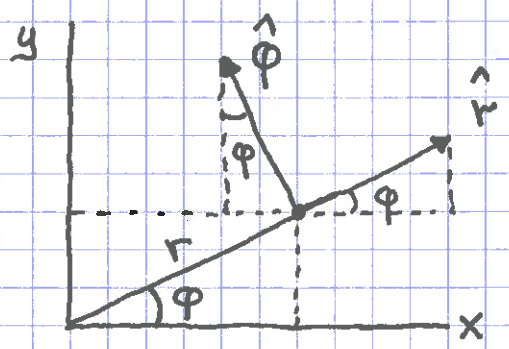
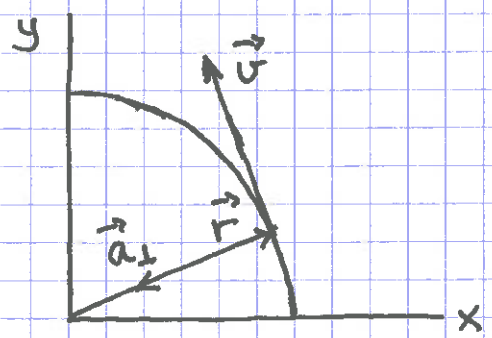
Dermed:

$$\vec{r}(t) = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = -r\omega \sin \omega t \hat{x} + r\omega \cos \omega t \hat{y}$$

$$\vec{a}_{\perp}(t) = -r\omega^2 \cos \omega t \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \hat{y}$$

Dvs: $\vec{a}_{\perp} = -\omega^2 \vec{r}$ Sentripetalakselerasjon



Enhetsvektorer:

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

$$|\hat{r}| = |\hat{\varphi}| = 1 ; \quad \hat{r} \cdot \hat{r} = 1 = \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} ; \quad \hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0$$

Dermed:

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

$$\vec{v} = v \hat{\varphi} = r\omega \hat{\varphi}$$

$$\vec{a}_{\perp} = -\omega^2 r \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

Merk: \hat{r} og $\hat{\varphi}$ avhenger av t

Hvis v endrer seg:

01.09.14

8

Baneakselerasjon:

$$a_{\parallel} = \dot{v} = \frac{d}{dt}(vr) = r\dot{\omega}$$

Total akselerasjon:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r \hat{r} + r\dot{\omega} \hat{\phi}$$

Vinkelakselerasjon:

$$\alpha = d\omega/dt = d^2\phi/dt^2 ; \quad [\alpha] = \frac{1}{s^2}$$

Andre sentrale størrelser ved sirkelbevegelse

(og, generelt, ved gjentakende (periodisk) oppførsel) :

Periode: $T =$ tid pr omløp $[T] = s$

Frekvens: $f =$ antall omløp pr tidsenhet $[f] = \text{Hz} = \frac{1}{s}$

Relasjoner: Fra $v =$ omkrets/periode $= 2\pi r/T$ følger

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} ; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Newton's Lover

[YF 4,5 ; LL 2,3]

9

Empiriske, dvs basert på erfaring / eksperimenter.

N1:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$$

Null netto ytre kraft $\vec{F} \Rightarrow$ Legemet forblir i ro eller i rettlinjet bevegelse med uendret hastighet \vec{v} .

N2:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Netto ytre kraft $\vec{F} \Rightarrow$ Legeme med masse m får akselerasjon prop. med \vec{F} : $\vec{a} = \vec{F}/m$.

N3:

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

Hvis A virker på B med kraft \vec{F}_{AB} , virker

B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

A og B vekselvirker.

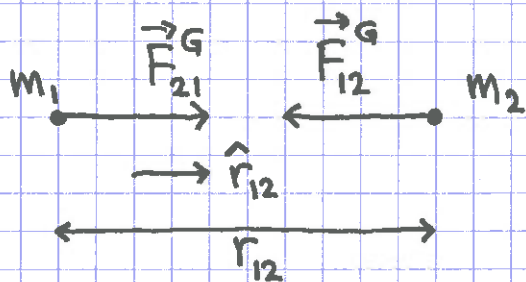
Enhet: $[F] = [m \cdot a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$ (newton)

Fundamentale krefter [YF 5.5 ; LL 2.1]

- Gravitasjon : Svak tiltrekning mellom masser.
- Elektromagnetisk : Tiltrekning eller frastøtning mellom elektriske ladninger.
- Kjernekrefter, svake og sterke : Kort rekkevidde, hvor ca 10^{-18} og 10^{-15} m. Beskriver hvor radioaktivitet og at kjernepartikler holdes sammen.

MekFys: Gravitasjon og Elektrostatisk.

Newton's gravitasjonslov:

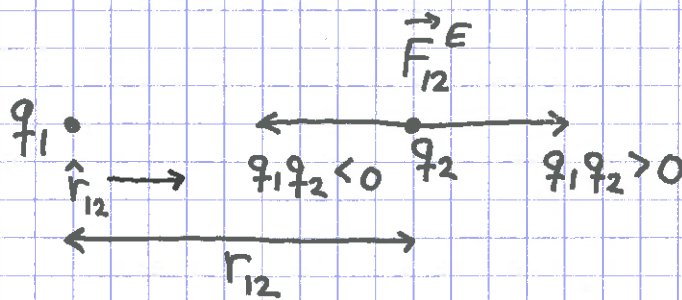


$$\vec{F}_{12}^G = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

(gravitasjonskonstanten ; lab nr 4)

Coulombs lov:



$$\vec{F}_{12}^E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$[q] = \text{C (coulomb)}$$

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Nm}^2}$$

(vakuumpermittiviteten)

Krefter mellom to elektroner: $m \sim 10^{-30}$ kg, $|q| = e \sim 10^{-19}$ C (11)

$$\Rightarrow F^E / F^G \sim 10^{43}$$

Mellom jord og måne; anta f.eks. ca 10^6 C (netto) på begge:

$$F^E / F^G \sim 10^{-15}$$

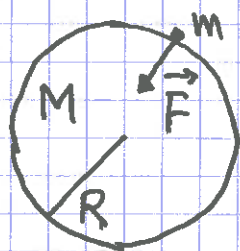
Mellom "dagligdagse" objekter i kontakt:

$F^E \gg F^G$ (selv med elektrisk nøytrale objekter)

I tillegg: F^G fra jorda

\Rightarrow "Hverdagen" styres av både F^E og F^G .

Tyngde [YF 4.4; LL 2.5]



Tiltr. kraft på m fra jorda
($M \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R \approx 6370$ km):

$$F = |\vec{F}| = G \cdot \frac{mM}{R^2} = m \cdot g$$

$$\text{med } g = GM/R^2 \approx 9.8 \text{ m/s}^2 \\ = \text{tyngdens akselerasjon}$$

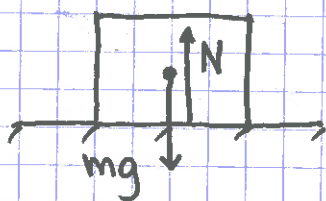
Fritt fall: Hvis mg er eneste kraft, er $mg = ma$ (N2)

$$\Rightarrow \underline{a = g}$$

Kontaktkrefter [YF 4.1 ; LL 3]

(12)

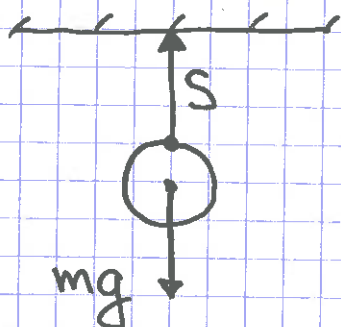
Normalkraft (trykk-kraft)



Kloss i ro $\Rightarrow \vec{N}_1 = mg$

Normalkraft N er netto frastøtende coulombkraft fra underlag på kloss

Snordrag (strekk-kraft)

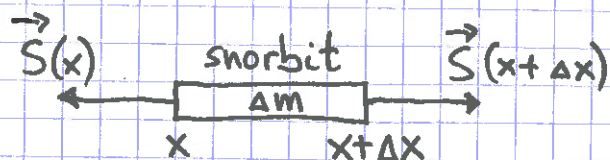


Kule i ro $\Rightarrow \vec{N}_1 = S = mg$

Snordrag S er netto tiltrekkende coulombkraft fra snor på kule

[Gjør rede for N_3 i disse to eksemplene!]

Konstant snordrag i lett ("masseløs") snor (stang):

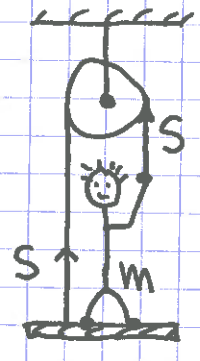
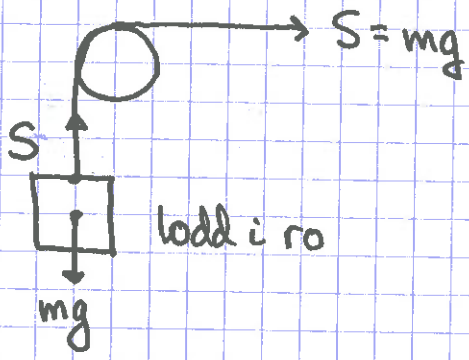


$$N_2: \vec{S}(x+\Delta x) + \vec{S}(x) = \Delta m \cdot \vec{a} \quad (S \gg \Delta m \cdot g)$$

$$\Rightarrow \vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x) \quad \text{hvis } \Delta m = 0 \quad (\text{evt. } \vec{a} = 0)$$

\Rightarrow konst. S langs hele snora (som blir rett)

Retningsendring med tåse (sylinder):

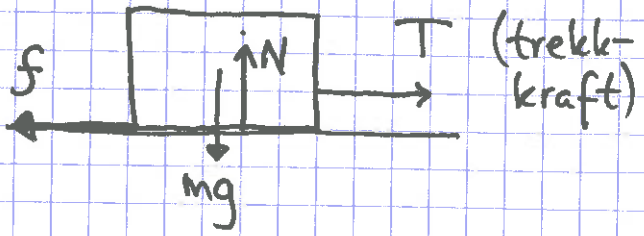


$N1: 2S = mg$
 $S = mg/2$
(talje)

Friksjon [YF 5.3 ; LL 3.1]

Kontaktkrefter rettet mot (potensiell) relativ bevegelse

Tørr friksjon:



f = friksjonskraft

Statisk (kloss i ro) : $f = T$ (N1)

$f_{max} = \mu_s N$ (empirisk)

Kinetisk (kloss i bevegelse) : $f = \mu_k N$

Frksjonskoeffisienter,

statisk: μ_s

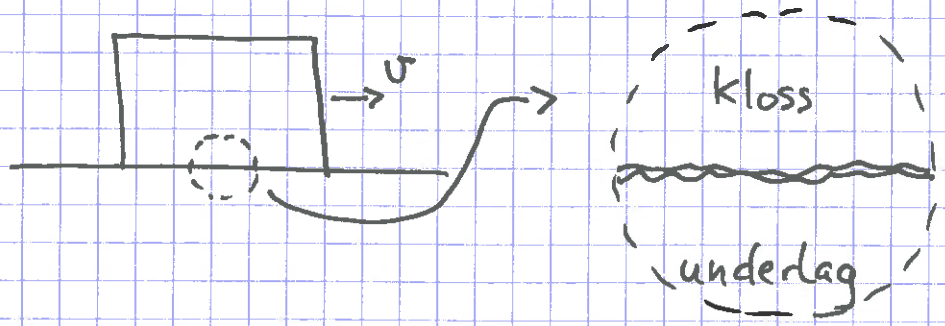
kinetisk: μ_k

$[\mu] = 1$

Noen tallverdier:

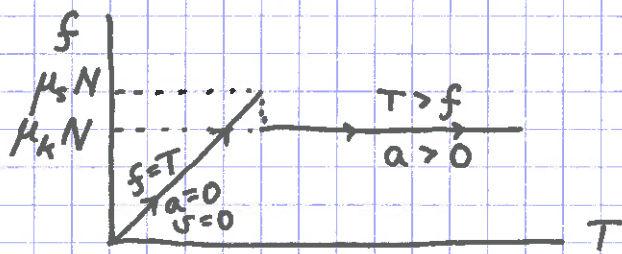
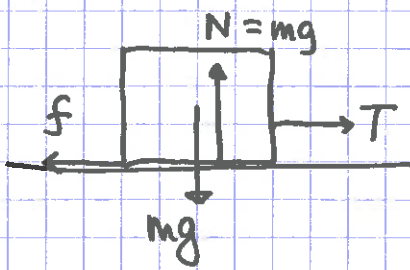
| | μ_s | μ_k |
|-----------------------|-----------|---------|
| tre mot tre | 0.25-0.50 | 0.2 |
| sølv mot sølv | 1.4 | 0.55 |
| gummi mot tørr asfalt | 1.0 | 0.8 |
| — " — våt — " — | 0.3 | 0.25 |

Hvorfor $\mu_s > \mu_k$?

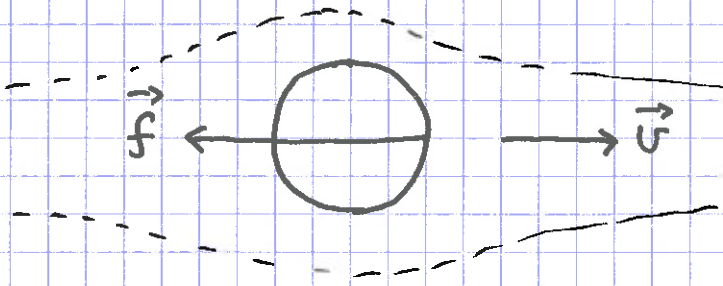


statisk ($v=0$): godt grep

kinetisk ($v>0$): flyter oppå



Friksjon i fluider (Våt friksjon) [YFS.3; LL8]



- Liten $v \Rightarrow$ laminær (pen) strømning av fluidet omkring legemet

$$\vec{f} = -k \vec{v} = -k v \hat{v}$$

- Stor $v \Rightarrow$ turbulent strømning

$$\vec{f} = -D v^2 \hat{v}$$

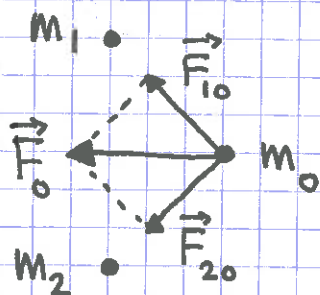
[Vis at $[k] = \text{kg/s}$ og $[D] = \text{kg/m}$]

Superposisjonsprinsippet

[YF 4.1]

(16)

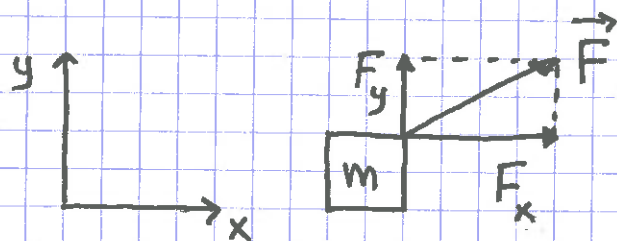
Krefter adderes vektorielt:



Nettokraft på m_0 fra m_1 og m_2 :

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20}$$
$$\Rightarrow \vec{a}_0 = \frac{1}{m_0} \vec{F}_0 = \frac{1}{m_0} \sum_j \vec{F}_{j0}$$

Omvendt kan vi dekomponere krefter:



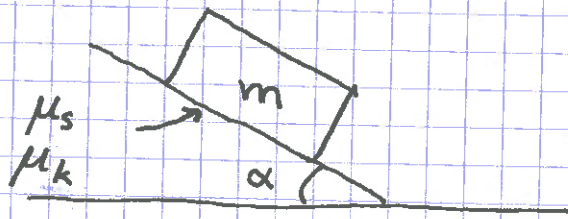
$$\vec{a} = \vec{F}/m$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = F_x/m, \quad \ddot{y} = F_y/m$$

Anvendelse av Newtons lover [YF 5, LL3]

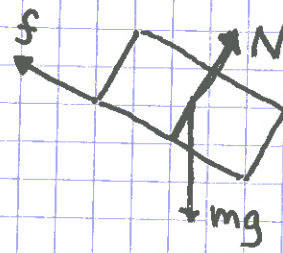
Strategi:

- Finn alle krefter \vec{F}_i som virker på legemet
- Tegn figur: Fritt legeme-diagram, dvs omgivelsene erstattes av krefter på legemet.
- Velg hensiktsmessig koord. system. Dekomponer.
- Bruk N2, evt. N1, alt etter behov.

Eks: Kloss(er) på skrånplan

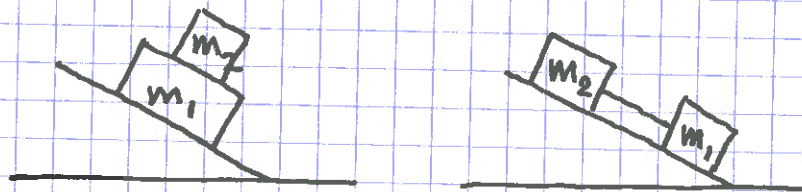


Fritt-legeme-diagram:

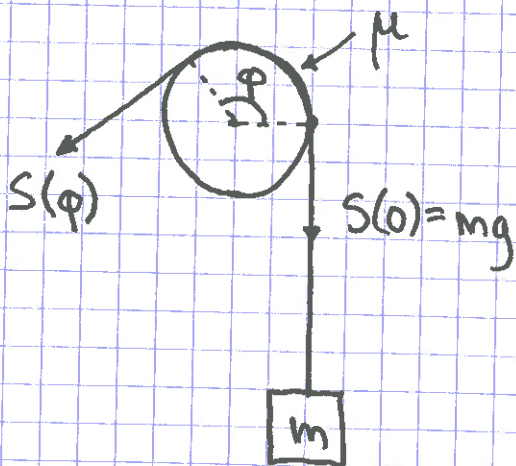


Mange aktuelle problemstillinger; se øving!

Flere klosser:



Eks: Snor rundt sylinder



$S(\varphi)$ = snordrag med kontaktvinkel φ mellom snor og sylinder

$S_{min}(\varphi)$ = minste snordrag for å holde lodd oppe

$S_{max}(\varphi)$ = største snordrag uten at lodd heises opp

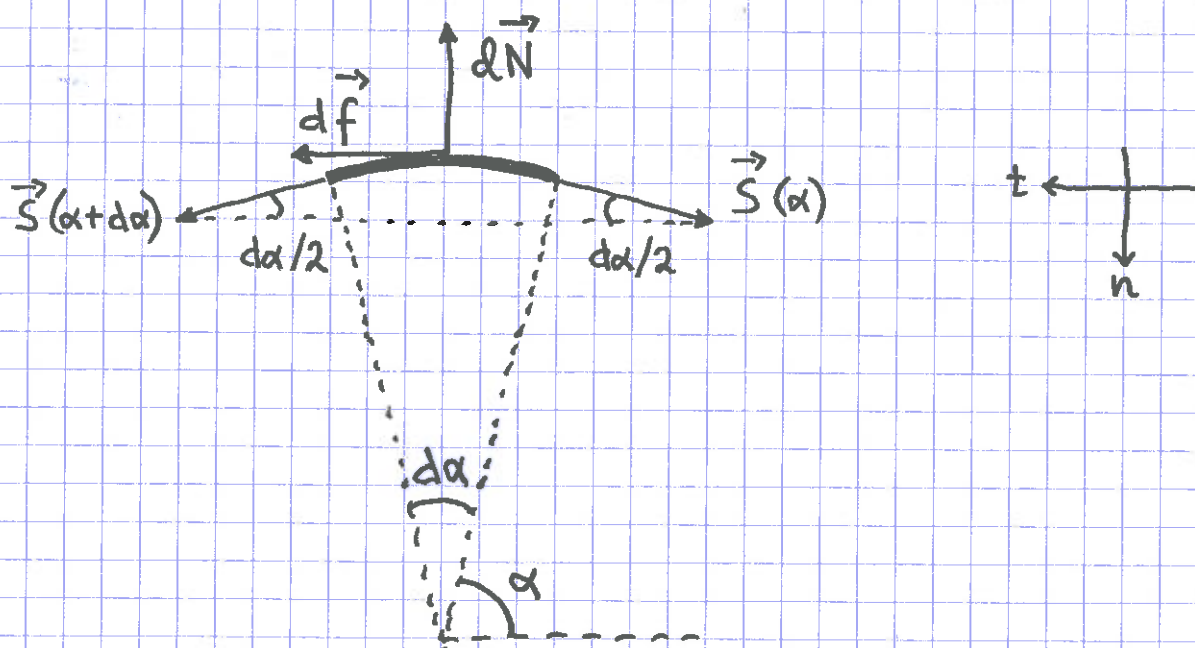
μ = statisk friksjonskoeff.

Erfaring: S_{min} og S_{max} avhenger sterkt av φ

Oppgave: Bestem $S_{min}(\varphi)$ og $S_{max}(\varphi)$

Strategi: Pga friksjon varierer S langs snora

\Rightarrow Se på liten snorbit mellom α og $\alpha + d\alpha$



\vec{S} = kraft på snorbit fra resten av snora
 $d\vec{N}$ = normalkraft fra sylinder på snorbit
 $d\vec{f}$ = friksjonskraft fra sylinder på snorbit;
 $df \leq \mu \cdot dN$; $df = \mu \cdot dN$ når $S(\varphi) = S_{\min}(\varphi)$ (max)

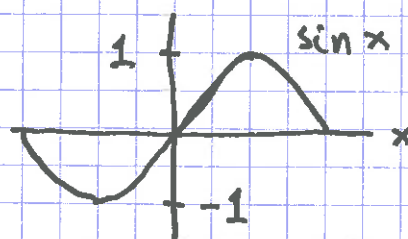
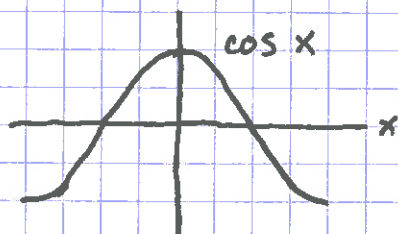
Snorbit i ro $\stackrel{N1}{\Rightarrow} \vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$

Dekomponer tangentielt (t) og normalt på (n):

$$(t) \quad S(\alpha + d\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} \pm df = 0$$

$$(n) \quad S(\alpha + d\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

Når $d\alpha \rightarrow 0$:



$$\Rightarrow \cos(d\alpha/2) \approx 1$$

$$\sin(d\alpha/2) \approx d\alpha/2$$

$$\Rightarrow (t) \quad S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) \pm \mu dN = 0$$

$$(n) \quad [S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha)] \cdot d\alpha/2 - dN = 0$$

Har videre: $S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS$

$$S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) \approx 2S$$

$$\Rightarrow (t) \quad dS = \mp \mu dN$$

$$(n) \quad S d\alpha = dN$$

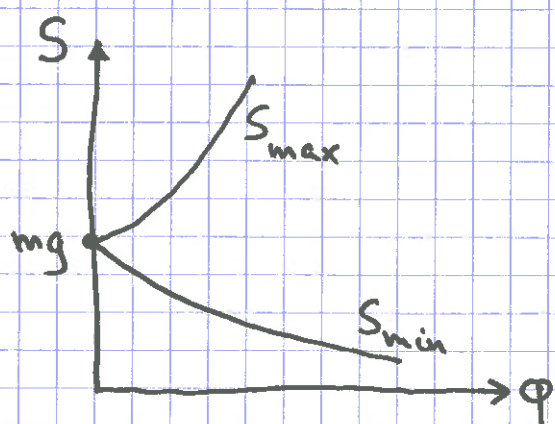
$$\stackrel{(t)/(n)}{\Rightarrow} \frac{dS}{S} = \mp \mu d\alpha \quad \Rightarrow \int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = \mp \int_0^\varphi \mu d\alpha$$

$$\Rightarrow \ln S(\varphi) - \ln S(0) = \ln [S(\varphi)/S(0)] = \mp \mu \varphi$$

$$\Rightarrow S(\varphi) = S(0) \exp(\mp \mu \varphi) \quad ; \quad S(0) = mg$$

Øre fortegn: $d\vec{f}$ bidrar til å holde lødd opppe (som i fig.)

$$\Rightarrow S_{\min}(\varphi) = mg \cdot \exp(-\mu \varphi) \quad ; \quad S_{\max}(\varphi) = mg \cdot \exp(+\mu \varphi)$$



Talleks: $\mu = 0.2$, $\varphi = 2\frac{1}{4}$ omdrein. $= 9\pi/2$ gir

$$S_{\min}/mg = \exp(-0.9\pi) \approx 0.06$$

$$S_{\max}/mg = \exp(0.9\pi) \approx 17$$

Arbeid og energi

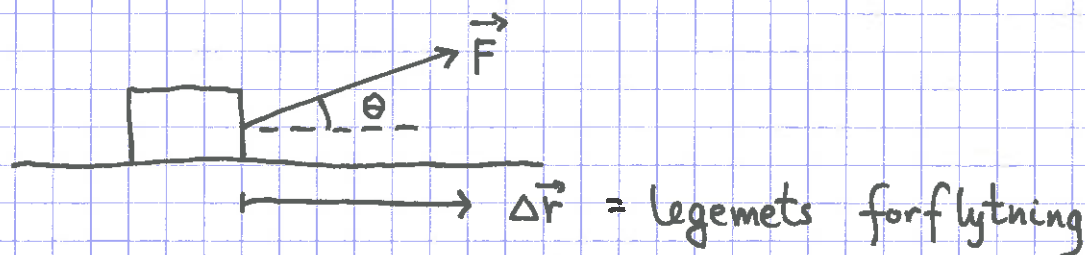
[YF 6, 7 ; LL 4]

20

08.09.14

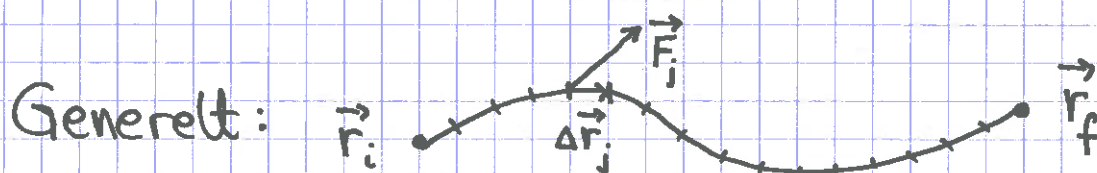
Arbeid

[YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]



$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = \text{arbeid utført av ytre kraft } \vec{F} \text{ på legemet}$$

$$[W] = N \cdot m = J \text{ (joule)}$$



Arbeid utført ved forflytning fra \vec{r}_i til \vec{r}_f :

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \stackrel{\Delta r_j \rightarrow 0}{=} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Effekt

[YF 6.4 ; LL 4.1]

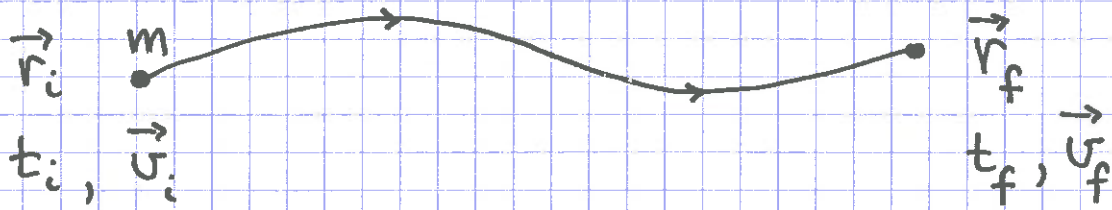
= arbeid (energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = J/s = W \text{ (watt)}$$

Kinetisk energi [YF 6.2; LL 4.2]

(21)



$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{N2}{=} \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} dt = m \int_{u_i}^{u_f} \vec{u} \cdot d\vec{u}$$

$$d(u^2) = d(\vec{u} \cdot \vec{u}) = d\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot d\vec{u} = 2\vec{u} \cdot d\vec{u}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{u_i^2}^{u_f^2} d(u^2) = \frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2$$

Definerer: $K = \frac{1}{2} m u^2 =$ kinetisk energi

Dermed:

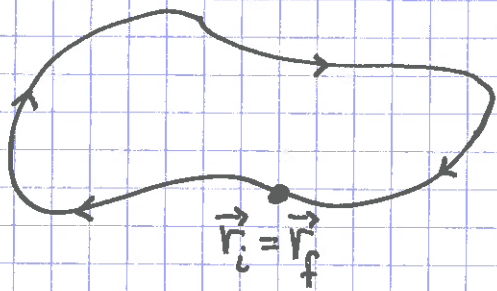
$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

Arbeid W utført på legemet tilsvarer endringen ΔK i legemets kin. energi.

Konservativ kraft [YF 7.3 ; LL 4.4]

(22)

System uten tap av mekanisk energi til andre energiformer (som varme) er konservativt.



Hvis \vec{F} er konservativ, er $K_f = K_i$ ($|\vec{v}_f| = |\vec{v}_i|$),
dvs $W = \Delta K = 0$

Dermed:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

($\oint \dots$: Integral rundt lukket kurve.)

Potensiell energi [YF 7.1-7.4 ; LL 4.3-4.4]

Med kons. kraft \vec{F} er potensiell energi

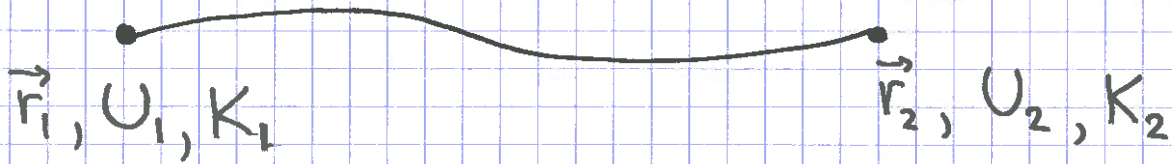
$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Har her valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

Dvs: Kun forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

Mekanisk energibevarelse [YF 7.1-7.3; LL 4.5]

23



$$\begin{aligned} U_1 - U_2 &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W = K_2 - K_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

Dvs: Total mekanisk energi,

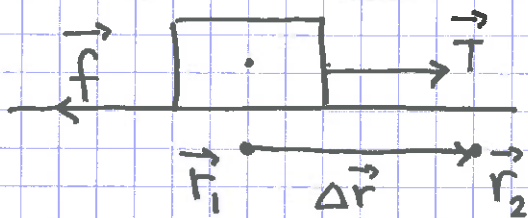
$$E = K + U,$$

er konstant ("bevart")

for et konservativt system.

Friksjonsarbeid

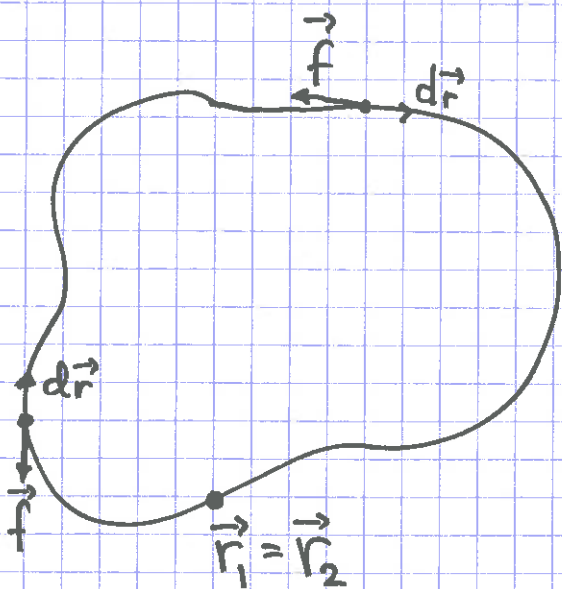
[YF 7.3 ; LL 4.5]



$$W_f = \int_{r_1}^{r_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ alltid er}$$

rettet mot $d\vec{r}$. Friksjonsarbeidet W_f

"går tapt" : Mek. energi \rightarrow Varme

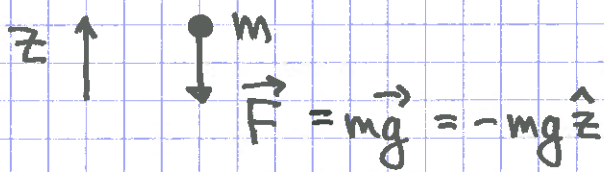


$$\Rightarrow \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$

\Rightarrow Friksjonskraften \vec{f} er ikke konservativ.

Eks: Fritt fall

(25)



Anta $U(0)=0$, $v(0)=0$.
Bestem $U(z)$ og $v(z)$
for $z < 0$.

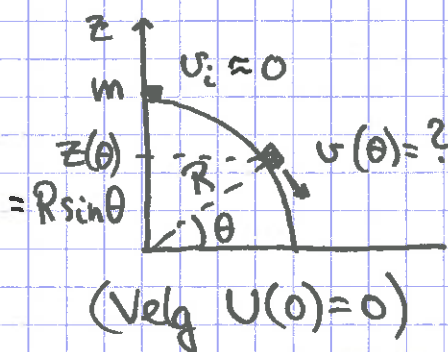
Løsn:
$$U(z) = - \int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z} dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$$

$$E(0) = U(0) + K(0) = 0$$

$$\Rightarrow U(z) + K(z) = mgz + \frac{1}{2}mv(z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}}$$

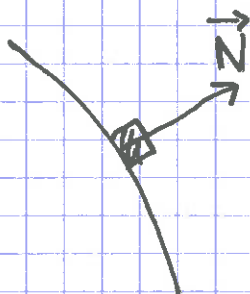
Eks: Gli på kuleflate



Løsn: E er bevart (uten friksjon)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mgz(\theta) = mgR$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - \sin\theta)}}}$$



- Myster kontakten med underlaget når $N=0$; "skrått kast" derfra. Hvor skjer dette?
- Hva med friksjon?
- Hva hvis legemet kan rulle?
Evt rulle og gli samtidig, dvs slure?

Impuls [YF8; LLS]

(= bevegelsesmengde, "(linear) momentum")

$$N2: \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \begin{matrix} \text{hvis} \\ m = \text{konst.} \end{matrix} \quad \frac{d}{dt} (m\vec{v})$$

impuls = masse · hastighet

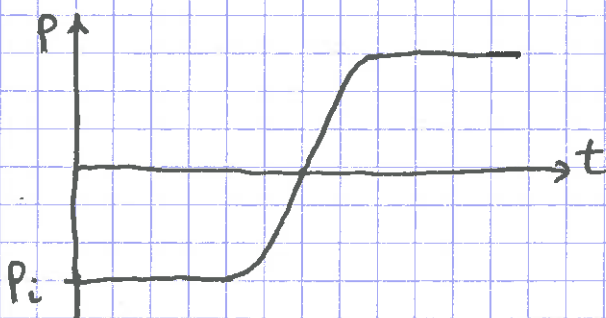
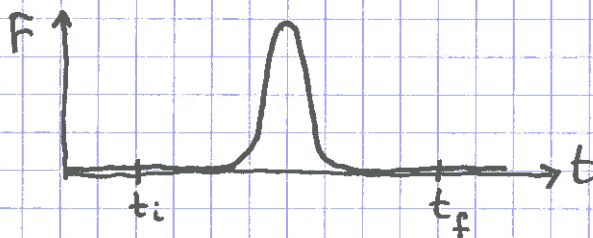
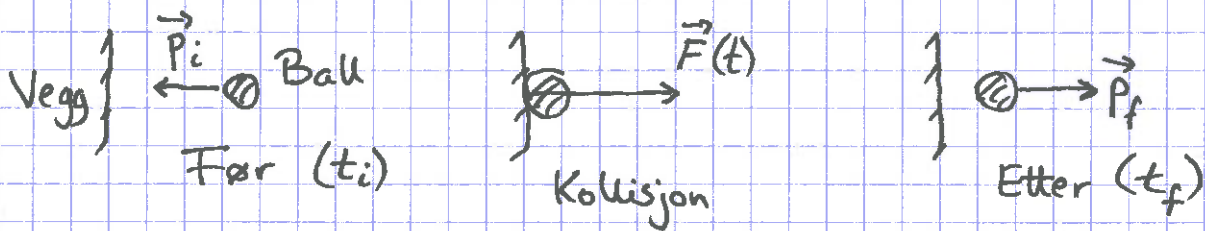
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad [p] = \text{kg m/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad N2$$

⇒ Lov om impulsbevarelse:

Hvis sum av ytre krefter på et legeme er null, er legemets impuls bevart: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$

Ytre $\vec{F} \Rightarrow$ impulsendring:



$$\begin{aligned} \Delta \vec{p} &= \vec{p}_f - \vec{p}_i \\ &= \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \end{aligned}$$

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4; LL 5.3]

11.09.14

27

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ (energi bevart)

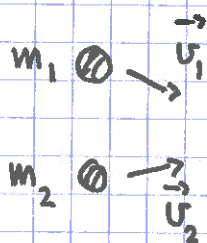
Uelastisk støt: $\Delta K < 0$ (— ikke bevart)

Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen, felles hastighet etter kollisjonen, max. energitap $|\Delta K|$.

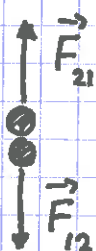
Tapt mek. energi $\Delta K \rightarrow$ deformasjon, lyd, varme...

Hvis $\vec{F}_{\text{ytre}} = 0$, er $\Delta \vec{p} = 0$ for alle typer kollisjoner.

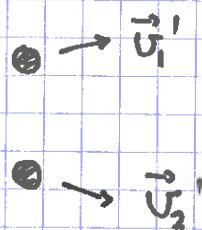
Indre krefter \vec{F}_{ij} endrer ikke systemets totale impuls:



Før



Kollisjon
(kort varighet Δt)



Etter

$$N3: \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \stackrel{N2}{\Rightarrow} \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{tot}} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Tennis-serve; anslå midlere kraft (28)

$\langle F \rangle$ og sammenlign med mg .

Løsn: $m = 57 \text{ g}$, $\Delta v = 263.4 \text{ km/h} = 73.2 \text{ m/s}$, $\Delta t \sim 7 \text{ ms}$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = \frac{m \Delta v}{\Delta t} = \frac{57 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 73.2 \text{ m/s}}{7 \cdot 10^{-3} \text{ s}} \approx \underline{600 \text{ N}}$$

$$\langle F \rangle / mg = \frac{\Delta v}{g \Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} \approx \frac{10^4 \text{ m/s}^2}{10 \text{ m/s}^2} = \underline{1000}$$

\Rightarrow OK å neglisjere den ytre kraften mg i kollisjonen

Sentralt støt [YF 8.2-8.4; LL 5.3]

Før (i): $m \rightarrow v$ $V \leftarrow M$

Etter (f): $v' \leftarrow m$ $M \rightarrow V'$

Fortegn: $\rightarrow +$ (dvs $v, V' > 0$ og $v', V < 0$ i fig.)

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{P_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{P_f}$$

(a) Fullstendig uelastisk støt (enklest):

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$$

(b) Delvis uelastisk støt: Har 1 lign. ($\Delta p = 0$) for

2 ukjente (v', V') \Rightarrow Trenger en opplysning til

for å fastlegge v' og V' .

(c) Elastisk støt, $\Delta K = 0$:

(29)

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2}_{K_i} = \underbrace{\frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} M V'^2}_{K_f}$$

"Tricks" (lett omskiving):

$$m(v + v')(v - v') = M(V' + V)(V' - V) \quad (1) \quad (\Delta K = 0)$$

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (2) \quad (\Delta p = 0)$$

(1) delt på (2) gir:

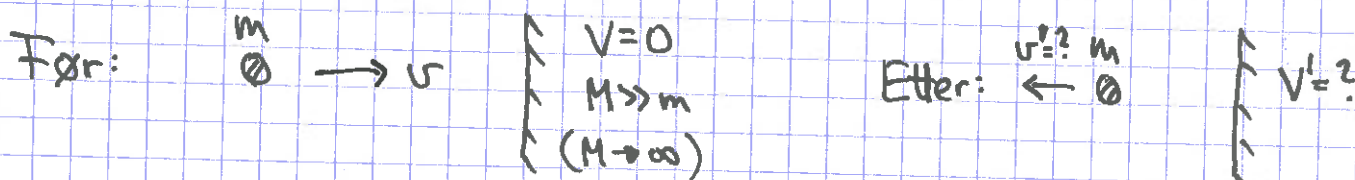
$$\begin{aligned} v + v' &= V + V' \\ \Rightarrow v' - V' &= -(v - V) \quad (3) \end{aligned}$$

Fra (2) og (3) fås:

$$v' = \frac{M}{m+M} (2V + v \cdot \frac{m-M}{M})$$

$$V' = \frac{m}{M+m} (2v + V \cdot \frac{M-m}{m})$$

Eks: Ball mot vegg, elastisk koll.



- Bestem v' og V'
- Sjekk at $\Delta p = 0$ og $\Delta K = 0$

Løsn: $v' = \frac{M}{m+M} (0 + v \cdot \frac{m-M}{M}) \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot (-\frac{M}{M}) = -v$ (30)

$V' = \frac{m}{M+m} (2v + 0) \approx \frac{m}{M} \cdot 2v = 0$ } Som vendet

Impulsbevarelse:

$$p = mv, P = MV = 0, p' = mv' = -mv,$$

$$P' = MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv$$

$$\Rightarrow \Delta p = -mv + 2mv - mv - 0 = 0; \text{ OK}$$

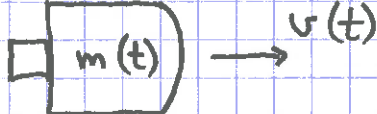
Energi bevarelse:

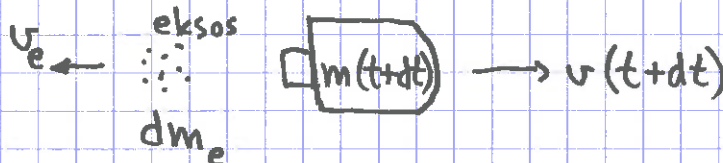
$$K_m = \frac{1}{2}mv^2, K_M = \frac{1}{2}MV^2 = 0, K_m' = \frac{1}{2}m(v')^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$K_M' = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}M \left(\frac{m}{M} \cdot 2v\right)^2 = \frac{2m^2v^2}{M} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 = 0; \text{ OK}$$

Rakettprinsipp [YF 8.6; LL 5.4]

"Før" (t):  $p(t) = m(t)v(t)$

"Etter" (t+dt): 

$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm} \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm} \cdot \underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u}$$

med $u =$ eksosens hastighet relativt raketten ($u < 0$)

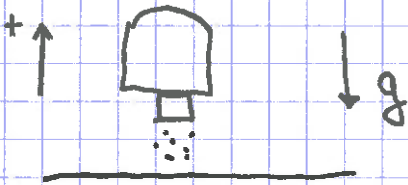
$dm =$ rakettenes masseendring fra t til $t+dt$ ($dm < 0$)

$$\Rightarrow p(t+dt) = \underbrace{m(t)v(t)}_{= p(t)} + m(t)dv + \underbrace{dm \cdot v(t) - dm \cdot v(t)}_{= 0} - dm \cdot u$$

"Outer space" : $F_{ytre} = 0$

$$\begin{aligned} \stackrel{N_2}{\Rightarrow} p(t+dt) &= p(t) \\ \Rightarrow m(t)dv &= u dm \\ \Rightarrow m \frac{dv}{dt} &= u \frac{dm}{dt} = u \dot{m} \\ \Rightarrow m \cdot a &= F_{skjv}, \text{ med} \\ \text{skjvkraft } F_{skjv} &= u \dot{m} > 0 \end{aligned}$$

I tyngdefeltet :



$$F_{ytre} = -mg$$

Total kraft på "rest-raketten" :

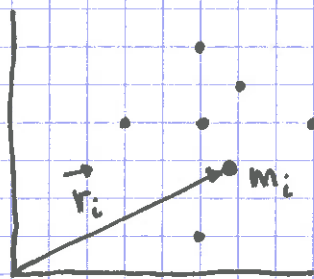
$$F_{skjv} + F_{ytre} = u \dot{m} - mg$$

$$\stackrel{N_2}{\Rightarrow} u \dot{m} - mg = ma \quad (\text{Øving})$$

Til nå: Punktmasser.

Nå: Partikkelsystemer. Stive legemer.

Massesenter. Tyngdepunkt [YF 8.5, oppg 8.115+8.116; LL 5.6, 5.8, 6.1]

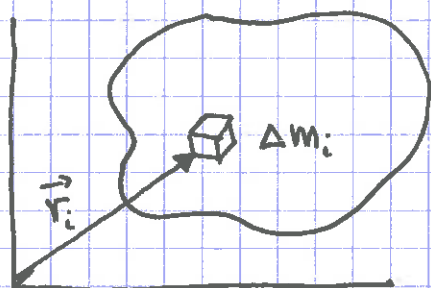


Massesenter (CM, "center of mass") for N punktmasser m_1, m_2, \dots, m_N i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Total masse: $M = \sum_i m_i$

Kontinuerlig massefordeling:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

$$= \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

(integrerer over der vi har masse!)

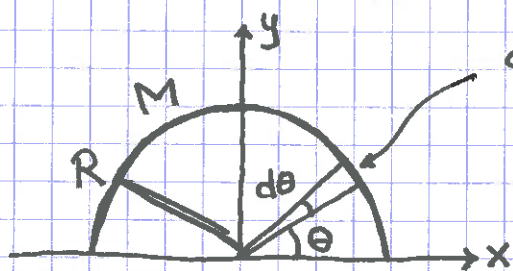
Masselement:

$dm = \rho dV$, ρ = masse pr volumenhet, dV = volumelement (3D)

$dm = \sigma dA$, σ = " " flate " ", dA = flate " " (2D)

$dm = \lambda dl$, λ = " " lengde " ", dl = lengde " " (1D)

Eks 1: CM for halvsirkulær bølge



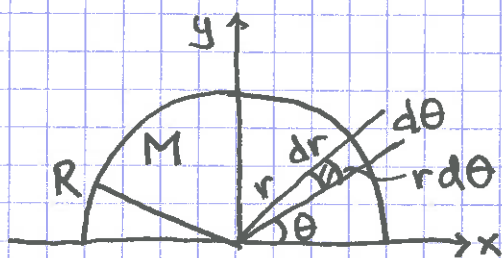
$$dm = M \cdot \frac{ds}{\pi R} = M \frac{R d\theta}{\pi R} = M \frac{d\theta}{\pi}$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}R\cos\theta + \hat{y}R\sin\theta$$

$$\vec{R}_{CM} = \bar{X}_{CM} \hat{x} + \bar{Y}_{CM} \hat{y} ; \bar{X}_{CM} = 0 \text{ pga symmetri}$$

$$\bar{Y}_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \underline{\underline{\frac{2}{\pi} R \approx 0.64 R}}$$

Eks 2: CM for halvsirkulær tynn skive



$$\frac{dm}{M} = \frac{r d\theta \cdot dr}{\frac{1}{2} \pi R^2}$$

$$\bar{X}_{CM} = 0 \text{ pga symmetri}$$

$$\bar{Y}_{CM} = \int y \frac{dm}{M} = \frac{2}{\pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin\theta \cdot r d\theta \cdot dr$$

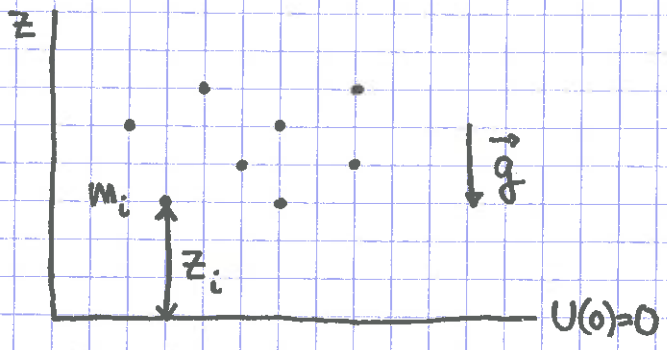
$$= \frac{2}{\pi R^2} \left\{ \int_0^R r^2 dr \right\} \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right\} = \underline{\underline{\frac{4}{3\pi} R \approx 0.42 R}}$$

$\int_0^R r^2 dr = R^3/3$ $\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} (-\cos\theta) = 2$

Eks 3: CM for kompakt halvkule

$$\bar{Y}_{CM} = \frac{3}{8} R \quad (\text{regn ut selv})$$

Potensiell energi for partikkelsystem i tyngdefeltet



$$U = \sum_i U_i = \sum_i m_i g z_i$$

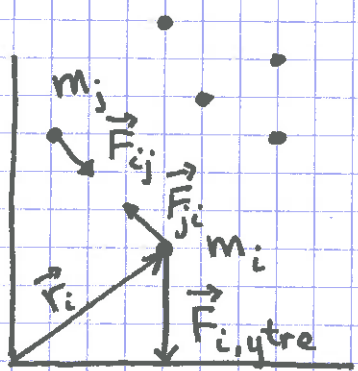
Hvis g er konstant:

$$U = g \sum_i m_i z_i = \underline{g M z_{cm}}$$

Dus: Som om hele massen M er samlet i høyden

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \quad (\text{f.eks. i } \vec{R}_{cm})$$

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5 ; LL 5.8]



System med N punktmasser
 m_1, m_2, \dots, m_N .

$$N2 \text{ for } m_i : m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \quad (i=1,2,\dots,N)$$

netto ytre kraft på m_i

netto indre kraft på m_i

Legger sammen N2 for alle massene:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \sum_i \vec{F}_{i,ytre} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}} \\ &= \text{netto ytre kraft } \vec{F}_{ytre} \text{ på hele systemet} \\ &= 0 \text{ pga } N3 \end{aligned}$$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} \{ M \vec{R}_{CM} \} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$\Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

Dus: CM beveger seg som om hele massen M er samlet i \vec{R}_{CM} og blir utsatt for summen av alle ytre krefter som virker på systemet.

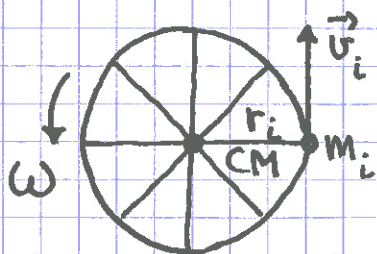
I tillegg til translasjon av CM:

- Rotasjon om CM
- Vibrasjon om CM

ROTASJON [YF 9,10 ; LL 6 (5)]

Innledning.

- Roterende hjul



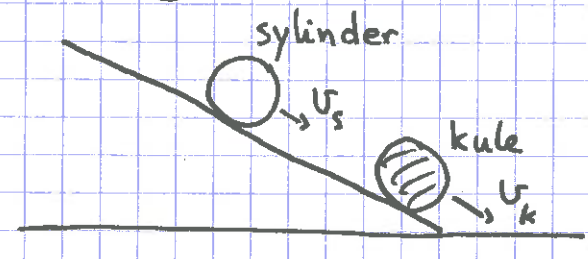
$$K_{trans} = 0 \quad \text{da CM er i ro}$$

$$K_{rot} \neq 0$$

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0 \quad \text{(lineær impuls)}$$

$$\vec{L} \neq 0 \quad \text{(dreieimpuls)}$$

• Rulling

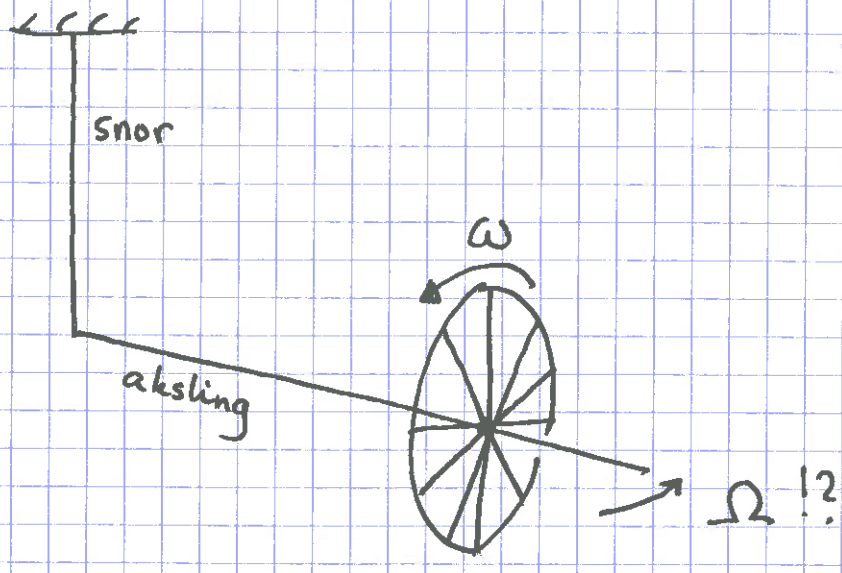


Kreftenes angrepspunkt;
dreiemoment.

Hvorfor $v_k > v_s$?

Friksjon.

• Overraskende dynamikk



Preseksjon
Gyroskop

- Stive legemer : Alle masselementer i fast innbyrdes avstand. Kun translasjon og rotasjon ; ikke vibrasjon.

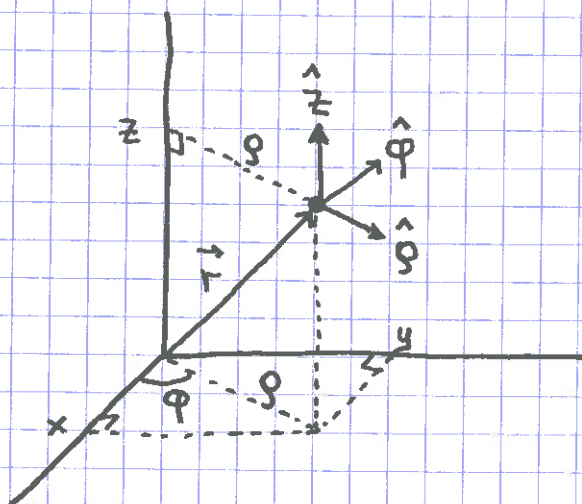
Sirkelbevegelse

[YF 9.1-9.3; LL 1.8]

(37)

Anta rotasjon om gitt akse, f.eks. z-aksen

Lurt med synderkoordinat = "polarkoord. + z"



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

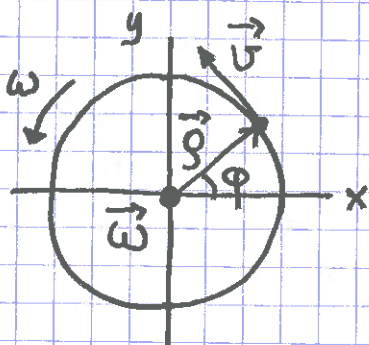
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Rotasjonsaksen pekes ut ved hjelp av ω :

$$\omega \rightarrow \vec{\omega} = \omega \hat{z}$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \rho \frac{d\varphi}{dt} \hat{\phi} = \rho \omega \hat{\phi}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}, \quad \vec{\rho} = \rho \hat{\rho}$$

[Notasjon for vektorer \perp planet:

- opp
- x ned

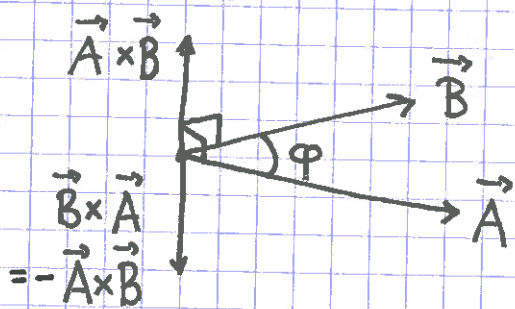
Med kryssprodukt:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

Retning: $\hat{\phi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$, OK! Abs.verdi: $v = \omega \rho$, OK!

Kryssprodukt (Vektorprodukt):

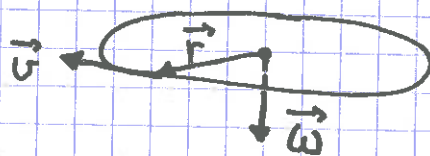
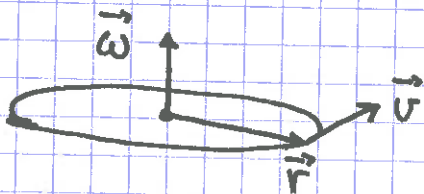
(38)



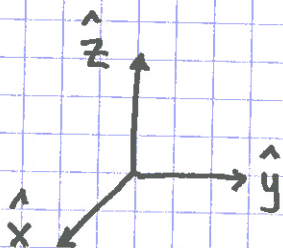
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A \cdot B \cdot \sin \varphi$$

Høyrehåndsregel gir retningen.

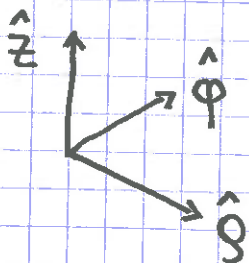
For sirkelbevegelsen:



For enhetsvektorer:



$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$
$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z} \quad \text{osv.}$$



$$\hat{g} \times \hat{\phi} = \hat{z}, \quad \hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{g},$$
$$\hat{z} \times \hat{g} = \hat{\phi}$$

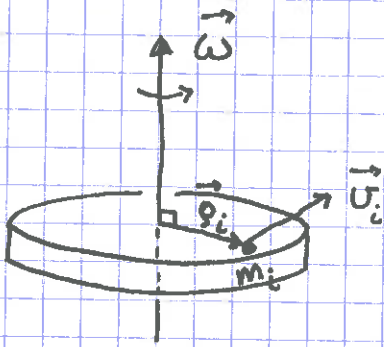
$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \dots = 0$$

Rotasjonsenergi

[YF 9.4; LL 6.4]

18.09.14

39



$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

$$v_i = \omega \rho_i$$

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2$$

Treghetsmoment

[YF 9.4; LL 6.3]

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 = \text{legemets treghetsmoment mhp gitt akse}$$

Med kontinuerlig massefordeling:

$$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm \quad ; \quad \sum_i \rightarrow \int \text{over legemet}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 dm}$$

ρ = avstand fra aksene til dm

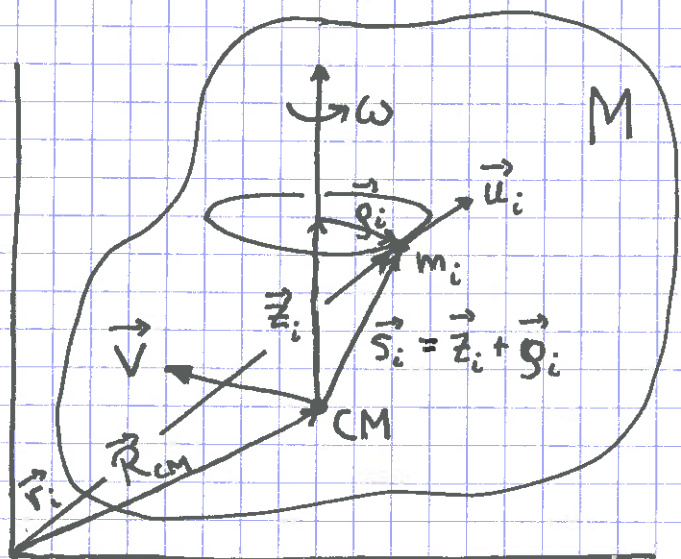
Dermed:

$$\boxed{K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Kin. energi for stivt legeme [YF 10.3; LL 6.6]

Generell bevegelse for stivt legeme:

Translasjon av CM + Rotasjon om akse gjennom CM



$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i \\ &= \vec{V} + \vec{u}_i \end{aligned}$$

$$v_i^2 = V^2 + u_i^2 + 2\vec{V} \cdot \vec{u}_i$$

$$u_i^2 = (g_i \omega)^2$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2 + \vec{V} \cdot \sum_i m_i \vec{u}_i \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_i m_i g_i^2 \right)}_{= I_0} \omega^2 + \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{s}_i \end{aligned}$$

$$\sum_i m_i \vec{s}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) = M \vec{R}_{CM} - M \vec{R}_{CM} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

M = legemets masse

$V = \dot{\vec{R}}_{CM}$ = hastigheten til CM

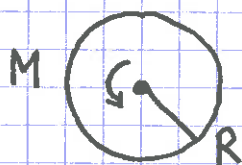
I_0 = legemets tregh.mom. mhp rot.aksen gjennom CM

$\vec{\omega}$ = vinkelhastigheten for rot. om ——— " ———

Beregning av I [YF 9.6 ; LL 6.3]

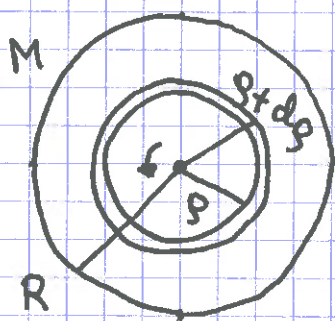
(41)

Eks 1: Ring, Sylinderskall



$$I_0 = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{MR^2}$$

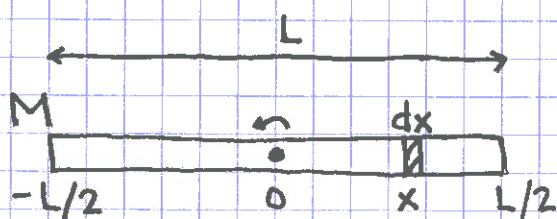
Eks 2: Rund skive, Kompakt cylinder



$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi\rho d\rho}{\pi R^2}$$

$$I_0 = \int_0^R \rho^2 M \frac{2\pi\rho d\rho}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \frac{1}{4} \rho^4$$
$$= \underline{\frac{1}{2} MR^2}$$

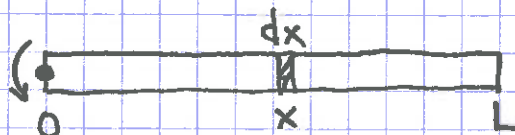
Eks 3: Tynn stang



$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L}$$

$$I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{3} x^3 = \underline{\frac{1}{12} ML^2}$$

Eks 4: Akse gjennom stangas ende

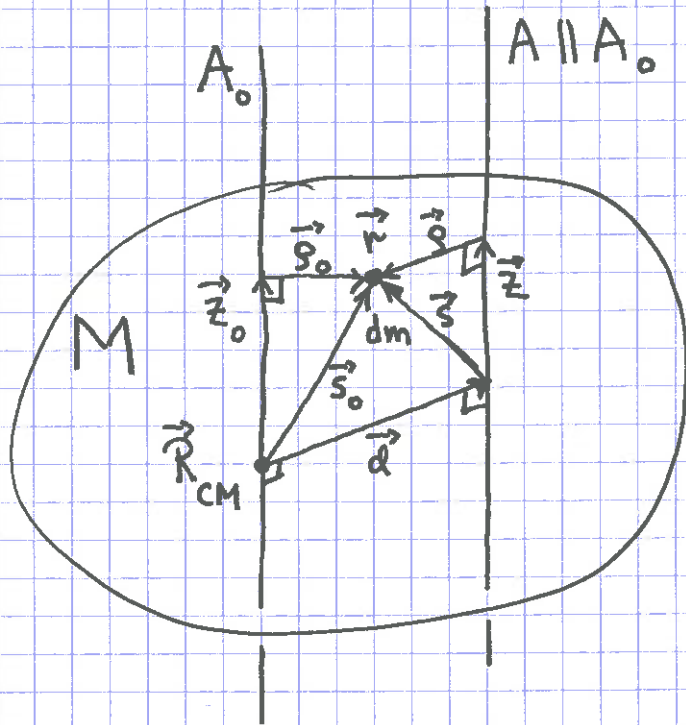


$$I_0 = \int_0^L x^2 M \frac{dx}{L} = \underline{\frac{1}{3} ML^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eks 5: Kuleskall } I_0 = \frac{2}{3} MR^2 \\ \text{Eks 6: Kompakt kule } I_0 = \frac{2}{5} MR^2 \end{array} \right\} \text{Øving.}$$

(42)

Steiners sats (Parallellaksesteoremet) [YF9.5; LL 6.3]



Fra figuren:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{R}_{CM} + \vec{s} \\ \vec{s}_0 &= \vec{r}_0 + \vec{s}_0 \\ \vec{s} &= \vec{r} + \vec{s}_0 \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 \quad (\vec{d} \perp \hat{z}) \\ \Rightarrow \vec{s} - \vec{s}_0 &= \vec{r} - \vec{r}_0 = -\vec{d} \\ \Rightarrow s^2 &= (\vec{s}_0 - \vec{d}) \cdot (\vec{s}_0 - \vec{d}) \\ &= s_0^2 + d^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{s}_0 \end{aligned}$$

$$I = \int s^2 dm = \underbrace{\int s_0^2 dm}_{I_0} + d^2 \cdot \underbrace{\int dm}_M - 2 \int \vec{d} \cdot \vec{s}_0 dm$$

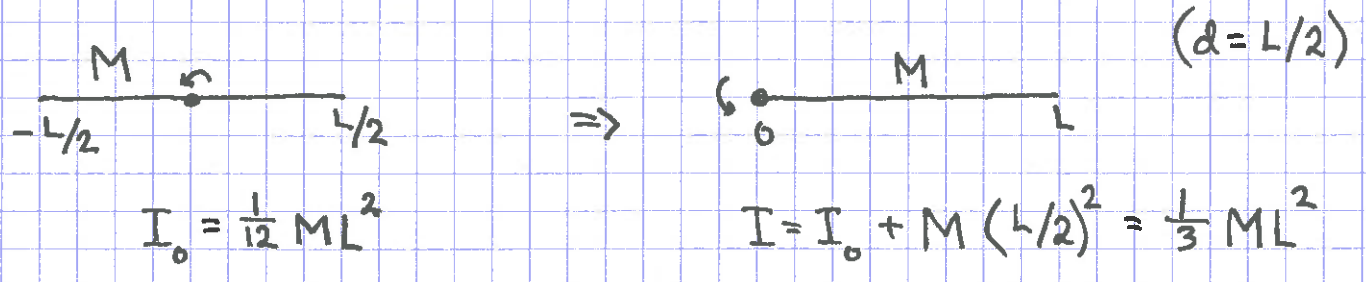
$$\vec{d} \cdot \vec{s}_0 = \vec{d} \cdot (\vec{s}_0 - \vec{z}_0) = \vec{d} \cdot \vec{s}_0 = \vec{d} \cdot (\vec{r} - \vec{R}_{CM})$$

$$\Rightarrow \int \vec{d} \cdot \vec{s}_0 dm = \vec{d} \cdot \underbrace{\int \vec{r} dm}_{M\vec{R}_{CM}} - \vec{d} \cdot \vec{R}_{CM} \underbrace{\int dm}_M = 0$$

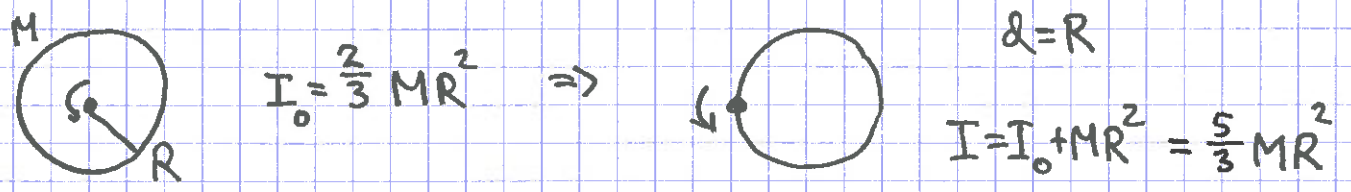
\Rightarrow

$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

Eks 1: Tynn stang



Eks 2: Kuleskall

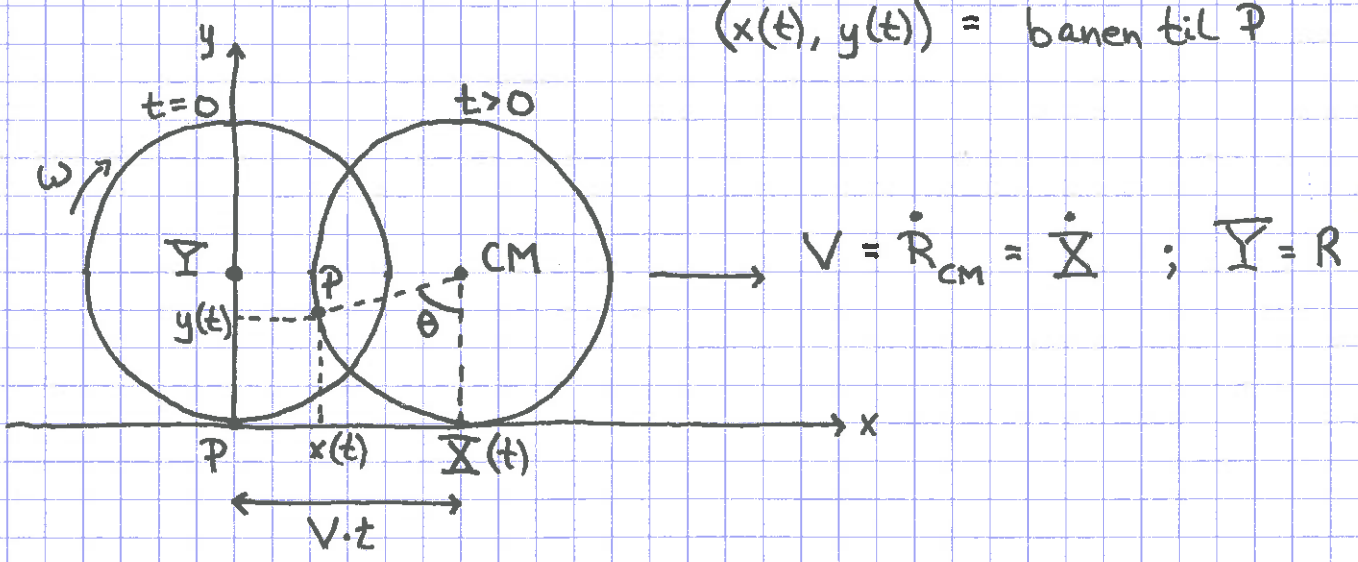


Rulling og skuring

[YF 10.3 ; LL 6.7]

Ren rulling

P = punkt på periferien
 $(x(t), y(t)) =$ banen til P



$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \underline{X} = Vt = R\theta$$

(44)

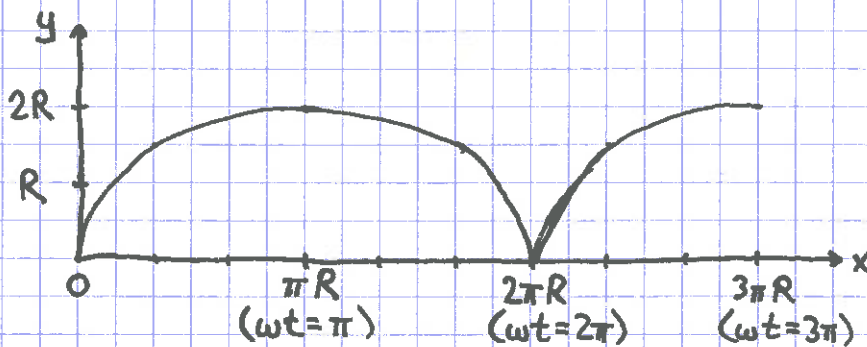
$$V = \dot{\underline{X}} = R\dot{\theta} = R\omega, \quad A = \ddot{\underline{X}} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha$$

Rullebetingelser: $V = R\omega, \quad A = R\alpha$

Banen til P (anta $\omega = \text{konst.} \Rightarrow \theta = \omega t$):

$$x(t) = \underline{X}(t) - R \sin \theta = Vt - R \sin \omega t$$

$$y(t) = \underline{Y} - R \cos \theta = R - R \cos \omega t$$



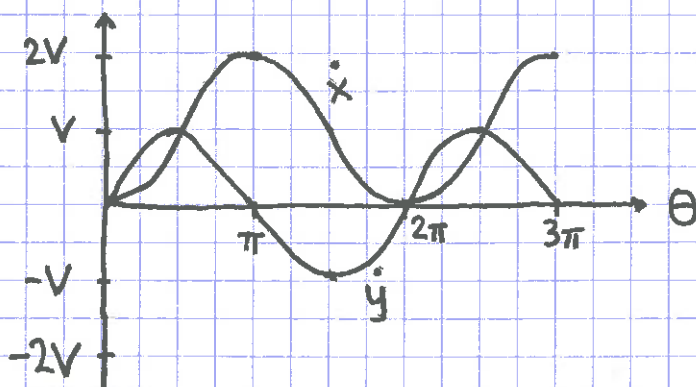
Sykloide

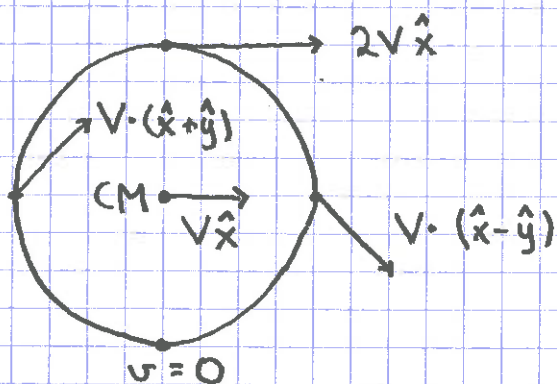
Hastigheten til P:

$$\dot{x} = V - \omega R \cos \omega t = V(1 - \cos \omega t)$$

$$\dot{y} = \omega R \sin \omega t = V \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{v}(\theta) = \hat{x} V(1 - \cos \theta) + \hat{y} V \sin \theta$$





Dus: Ingen relativ bevægelse i kontaktpunktet ved ren rulling.

Kin. energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$I_0 = c \cdot MR^2 \quad (\text{ring: } c=1; \text{ kuleskall: } c=\frac{2}{3} \text{ etc})$$

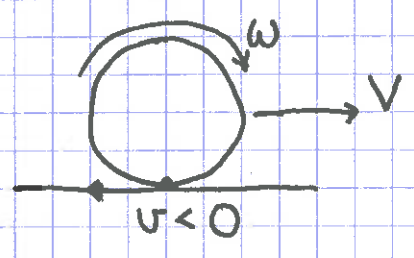
$$\omega = V/R \quad (\text{rullebet.})$$

$$\Rightarrow K = (1+c) \cdot \frac{1}{2} MV^2$$

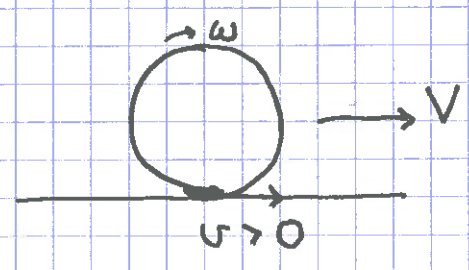
Sluring

Hvis $\omega \neq V/R$, er rel. hast. $v = V - \omega R \neq 0$ mellom legeme og underlag i kontaktpunktet
 \Rightarrow Legemet roterer og glir; det slurer.

$\omega > V/R$:

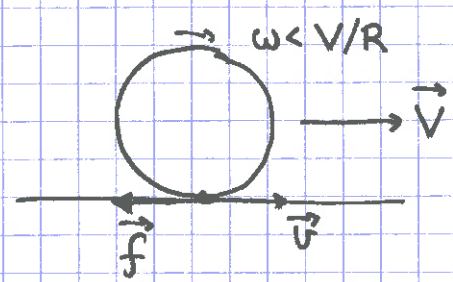
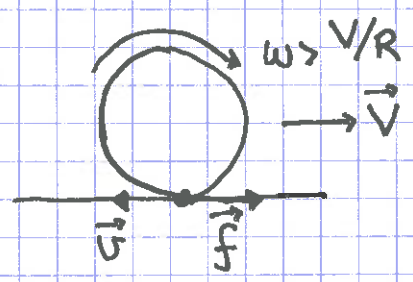


$\omega < V/R$:



Friksjonens rolle

Sluring:



\vec{f} alltid rettet mot \vec{v} ; $f = |\vec{f}| = \mu_k \cdot N$

Effekttap: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow$ tap av mek. energi

Ren rulling:

$v = 0 \Rightarrow P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$ mek. energi bevart

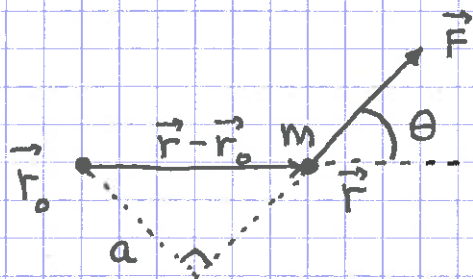
Statisk friksjon, $f \leq \mu_s \cdot N$. Retning: \vec{f} mot

"tenkt relativhastighet" \vec{v} hvis det ikke var friksjon.

Dreiemoment

[YF 10.1; LL 5.5, 6.4]

(47)



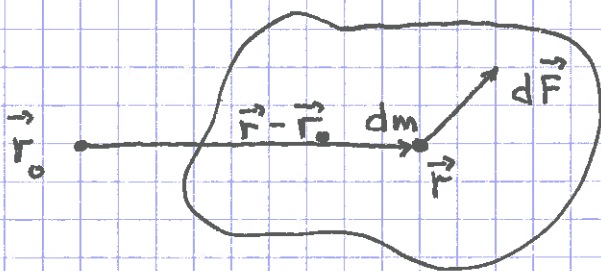
Dreiemomentet $\vec{\tau}$ på m ,
relativt det valgte
referansepunktet \vec{r}_0 :

$$\boxed{\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}}$$

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og
 $\vec{\tau} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$ ($\vec{\tau}$ opp i figuren; h.h.regel)

$$\begin{aligned} \text{Abs. verdi: } |\vec{\tau}| &= |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \theta \\ &= a \cdot F \quad (\text{arm} \cdot \text{kraft}) \end{aligned}$$

For partikkelsystem:



$$\text{Dreiemoment på } dm: d\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

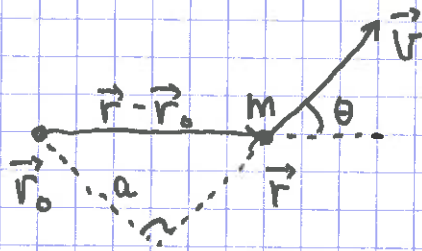
Totalt dreiemoment på legemet:

$$\vec{\tau} = \int d\tau = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

Dreieimpuls

[YF 10.5 ; LL 6.6]

(48)



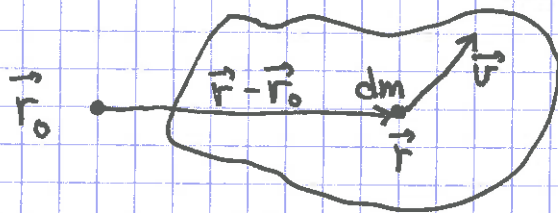
Dreieimpulsen til m ,
relativt \vec{r}_0 :

$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} = m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$$

Retning: $\vec{L} \perp \vec{p}$ og
 $\vec{L} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$ (\vec{L} opp i fig.)

$$\begin{aligned} \text{Abs.verdi: } |\vec{L}| &= |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin \theta \\ &= a \cdot p \quad (\text{arm} \cdot \text{impuls}) \end{aligned}$$

For partikkelsystem:



$$\begin{aligned} \text{Dreieimpulsen til } dm: \quad d\vec{L} &= (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{p} \\ &= dm \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \end{aligned}$$

Total dreieimpuls for legemet:

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \, dm$$

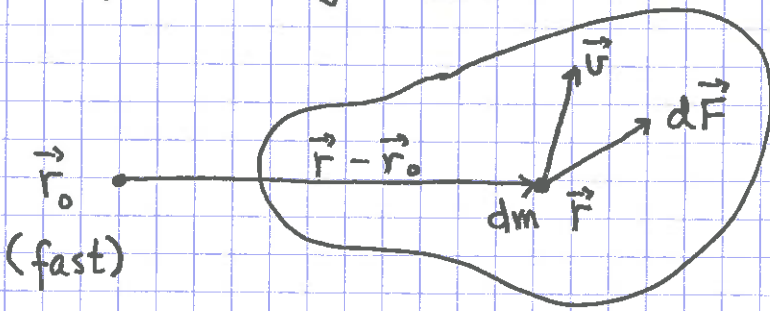
N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]
(Spinnsatsen)

$$N2 : \vec{F} = m\vec{a} = m d\vec{v}/dt = d\vec{p}/dt$$

Anta fast \vec{r}_0 , dvs $\dot{\vec{r}}_0 = 0$, evt. $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \right\} = m \underbrace{(\vec{v} - \dot{\vec{r}}_0) \times \vec{v}}_{=0} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a} \\ &= (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} = \vec{\tau} \end{aligned}$$

For partikkelsystem :



N2 for dm:
 $d\vec{F} = dm \cdot \vec{a}$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int d\vec{L} = \frac{d}{dt} \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} dm \\ &= \int \underbrace{(\vec{v} - \dot{\vec{r}}_0) \times \vec{v}}_{=0} dm + \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a} dm \\ &= \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau} \end{aligned}$$

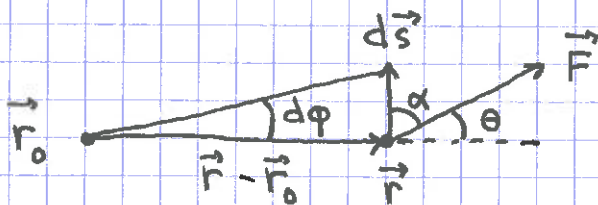
$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ N2, rot.

$\vec{\tau}$ = netto dreiemoment på legemet

\vec{L} = legemets dreieimpuls

Arbeid ved rotasjon

[YF 10.4; LL 6.4]



$$d\vec{s} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\alpha = \pi/2 - \theta$$

$$\cos \alpha = \sin \theta$$

Arbeid utført av \vec{F} ved rotasjon $d\varphi$:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$

$$= |\vec{F}| \cdot |\vec{r} - \vec{r}_0| d\varphi \cdot \sin \theta = \tau d\varphi$$

Tilført effekt:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau d\varphi}{dt} = \tau \omega$$

⇒ Ved rotasjon:

$$dW = \tau d\varphi$$

$$P = \tau \omega$$

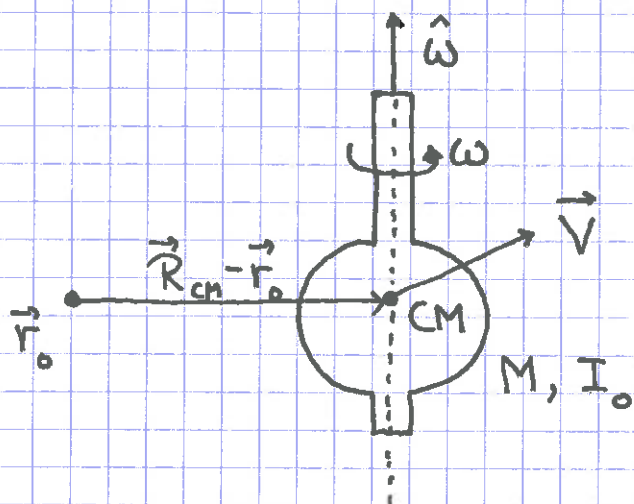
Sammenlign translasjon:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

\vec{L} for stivt legeme [YF 10.5 ; LL 6.6]

(51)

Forbehold: Legeme med ^{refleksjons-} ~~syndersymmetri~~ symmetri om rotasjonsaksen.



$$\text{Fra før: } K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

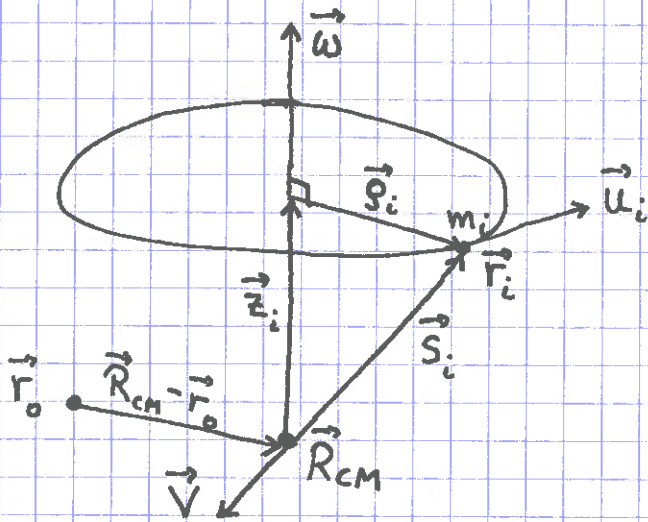
Tilsvarende:

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{\text{CM}} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

Banedreieimpuls relativt \vec{r}_0 : $\vec{L}_b = M(\vec{R}_{\text{CM}} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$

Indre dreieimpuls (Spinn), uavh. av \vec{r}_0 : $\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$

Bevis:



$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{u}_i$$

$$\vec{s}_i = \vec{r}_i - \vec{z}_i$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &= \vec{\omega} \times \vec{s}_i = \vec{\omega} \times (\vec{s}_i - \vec{z}_i) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{s}_i \quad (\vec{\omega} \parallel \vec{z}_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_o) \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_o + \vec{s}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i) \\ &= \sum_i m_i \left\{ (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_o) \times \vec{V} + \vec{s}_i \times \vec{V} + (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_o) \times \vec{u}_i + \vec{s}_i \times \vec{u}_i \right\} \end{aligned}$$

$$1. \text{ sum: } \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_o) \times \vec{V} = M (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_o) \times \vec{V} = \vec{L}_b$$

$$2. \text{ sum: } \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = (M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = 0$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ sum: } \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_o) \times \vec{u}_i &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_o) \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) \\ &= (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_o) \times \left(\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{s}_i}_{=0} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$4. \text{ sum: } \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \text{bidraget till } \vec{L} \text{ pga ber\u00e4gelse relativt CM}$$

(S\u00e5 langt, helt generellt.)

$$\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i \Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$

Vektoridentitet: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) &= \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega} s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) \right\} \\ &= \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega} (z_i^2 + \rho_i^2) - (\vec{z}_i + \vec{\rho}_i) z_i \omega \right\} \\ &= \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega} (z_i^2 + \rho_i^2) - z_i^2 \vec{\omega} - z_i \omega \vec{\rho}_i \right\} \\ &= \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega}}_{= I_o \vec{\omega} = \vec{L}_s} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i \end{aligned}$$

For vilkårlig stivt legeme bidrar leddet $-\omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$,
men med refleksjons-
~~symmetri~~ symmetri om $\hat{\omega}$, dvs om \hat{z} :

$$\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = \sum_i m_i z_i (x_i \hat{x} + y_i \hat{y}) = 0$$

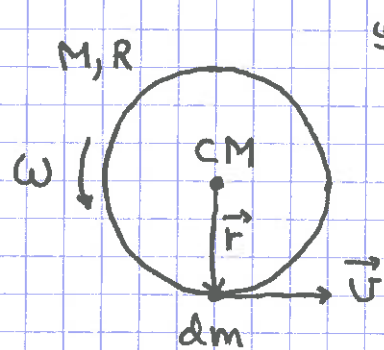
fordi bidrag fra (x_i, y_i) kanselleres av
bidraget fra $(-x_i, -y_i)$.

Dermed:

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M (\vec{R}_{cm} - \vec{r}_o) \times \vec{V} + I_o \vec{\omega}$$

qed

Eks 1: Ring, ren rotasjon om CM

Velger $\vec{r}_0 = \vec{R}_{CM} = 0$

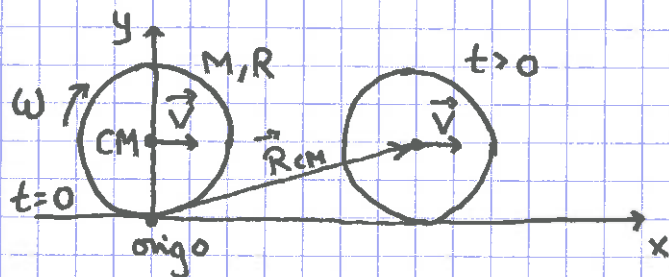
$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v} dm$$

$$= R \cdot \omega R \hat{z} \cdot dm$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \int d\vec{L} = \int \omega R^2 \hat{z} dm = MR^2 \omega \hat{z} = \underline{\underline{I_0 \vec{\omega}}}$$

$$\text{Dvs: } \vec{L} = \vec{L}_S ; \quad \vec{L}_b = M (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = 0$$

Eks 2: Rullende ring ($V = \omega R$)

(a) $\vec{r}_0 = \vec{R}_{CM} ; \quad \vec{L}_{CM} = ?$

(b) $\vec{r}_0 = 0 ; \quad \vec{L}_0 = ?$

Løsning:

(a) Som eks. 1, med $\vec{\omega} = -\omega \hat{z} \Rightarrow \vec{L}_{CM} = I_0 \vec{\omega} = \underline{\underline{-MR^2 \omega \hat{z}}}$

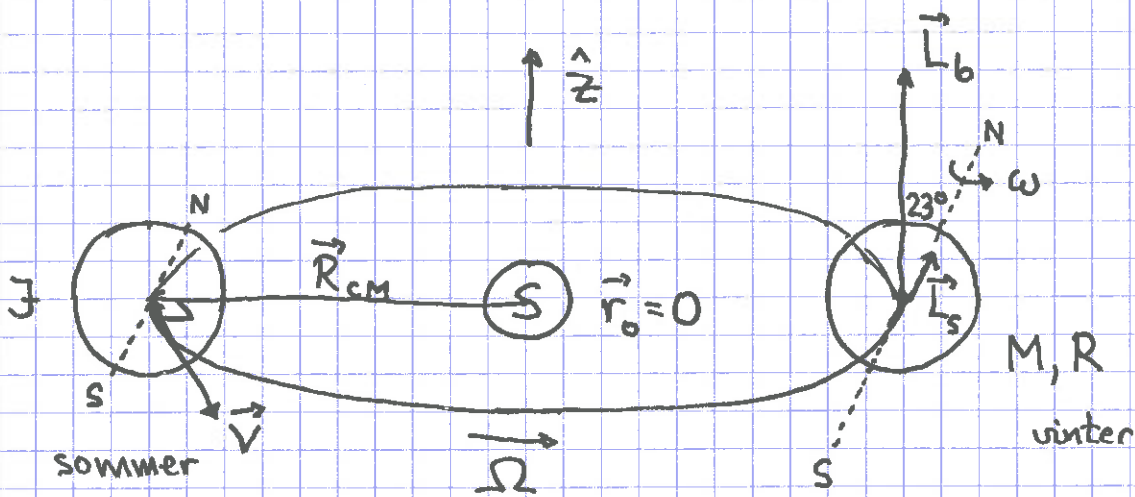
$$(b) \vec{L}_0 = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

$$= -MRV \hat{z} - MR^2 \omega \hat{z}$$

$$= \underline{\underline{-2MR^2 \omega \hat{z}}}$$

Øks 3: \vec{L} for Jorda relativt Sola

(55)



$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_b + \vec{L}_s = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_o \vec{\omega} \\ &= M R_{CM} V \hat{z} + I_o \omega \hat{N}\end{aligned}$$

Tallverdier:

$$M \sim 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad R_{CM} \sim 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad \Omega = 2\pi / 1 \text{ år}$$

$$\Rightarrow V = R_{CM} \Omega \sim 3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow L_b \sim 2.7 \cdot 10^{40} \text{ Js}$$

$$I_o \sim \frac{1}{3} MR^2, \quad R \sim 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad \omega = 2\pi / 1 \text{ døgn}$$

$$\Rightarrow L_s \sim 6 \cdot 10^{33} \text{ Js}$$

$$\text{Dvs: } L_b \gg L_s$$

Bevaringslover, oppsummert

- For isolert system (dvs ingen ytre krefter) er total energi, impuls og dreieimpuls bevart
- Mekanisk energi $E = K + U$ er bevart for konservativt system (dvs ingen dissipasjon av mek. energi pga friksjonsarbeid etc)
- Impuls \vec{p} er bevart for system som ikke påvirkes av netto ytre kraft \vec{F} :

N2, $\vec{F} = d\vec{p}/dt \Rightarrow d\vec{p} = 0$ hvis $\vec{F} = 0$

- Dreieimpuls \vec{L} er bevart for system som ikke påvirkes av netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$:

N2, rot., $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt \Rightarrow d\vec{L} = 0$ hvis $\vec{\tau} = 0$

Mekanisk likevekt [YF 11.1-11.3 ; LL 7.1]

Et stivt legeme er i ro,

$\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0,$

bare dersom

$\sum_i \vec{F}_i = 0$

Netto ytre kraft

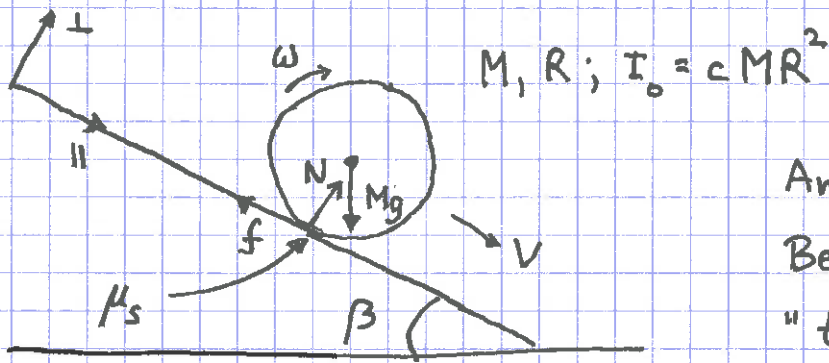
og

$\sum_i \vec{\tau}_i = 0$

Netto ytre dreiemoment

Rotasjonsdynamikk, eksempler

Eks 1: Rulling på skråplan [YF 10.3 ; LL 6.8]



Anta ren rulling.
Bestem \dot{V} og minste "tillatte" μ_s

Løsn: Både V og ω må øke. Må ha dreiemoment τ om CM konsistent med dette. Kun f har arm mhp CM. Dermed: f oppover for å gi $\dot{\omega} > 0$.

$$N2, \parallel : Mg \sin \beta - f = M \dot{V}$$

$$N1, \perp : N = Mg \cos \beta$$

$$N2, \text{rot. om CM} : f \cdot R = I_0 \dot{\omega} = cMR^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R} = cMR \dot{V}$$

$$f = cM \dot{V}$$

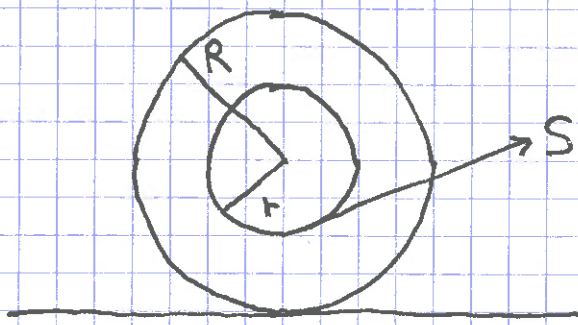
$$\Rightarrow Mg \sin \beta - cM \dot{V} = M \dot{V} \Rightarrow \underline{\underline{\dot{V} = g \cdot \frac{\sin \beta}{c+1}}}$$

$$f \leq f_{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow cM \cdot g \frac{\sin \beta}{c+1} \leq \mu_s Mg \cos \beta \Rightarrow \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{c+1} \tan \beta}}$$

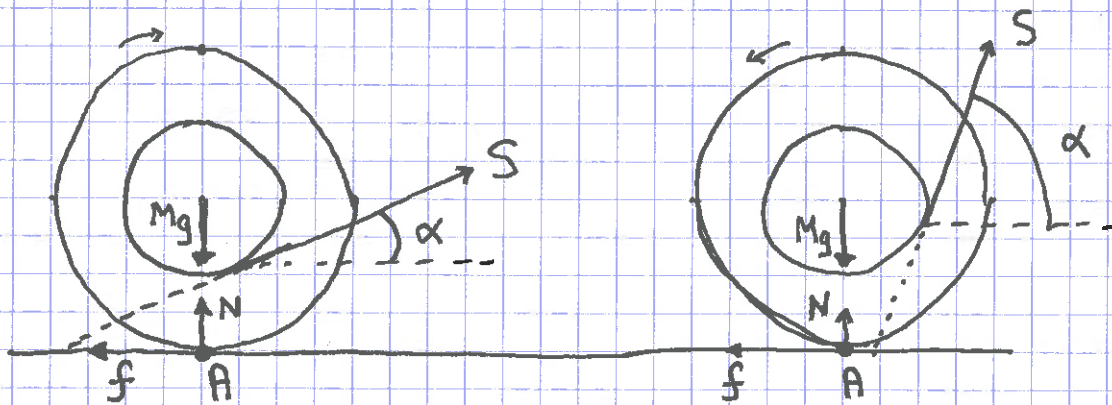
Ring, sylinderskall ($c=1$): $\dot{V} = \frac{1}{2} g \sin \beta$, $\mu_s^{\min} = \frac{1}{2} \tan \beta$

Kompakt kule ($c=2/5$): $\dot{V} = \frac{5}{7} g \sin \beta$, $\mu_s^{\min} = \frac{2}{7} \tan \beta$



Anta ren rulling.
Hvilken vei ruller snella?

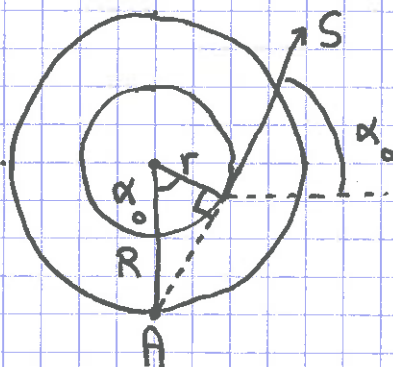
Løsn: Ingen krefter har arm mhp kontaktpunktet A, unntatt snordraget S:



Liten $\alpha \Rightarrow$ Rot. med klokka
 \Rightarrow Ruller mot høyre

Stor $\alpha \Rightarrow$ Rot. mot klokka
 \Rightarrow Ruller mot venstre

Statisk likevekt hvis også S går gjennom A:

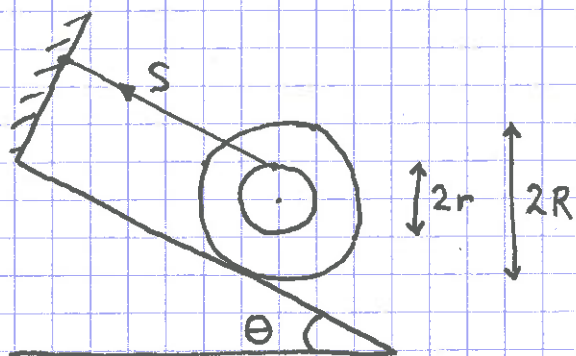


$$\Rightarrow \underline{\cos \alpha_0 = r/R}$$

Med $\alpha = \alpha_0$, sklir snella hvis S blir større enn

$$\mu_s Mg / \left(\frac{r}{R} + \mu_s \sqrt{1 - r^2/R^2} \right). \text{ Vis selv!}$$

Eks 3: Sluresnelle



Finn max vinkel θ_0 uten at snella glir nedover skr pplanet. Hva er S da?

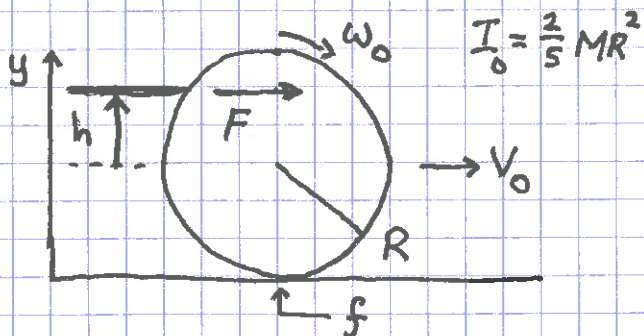
Tips: N_1, \parallel ; $N_1, \text{rot. om CM}$; $f = f_{\text{max}} = \mu_s N$ n r $\theta = \theta_0$

Finn ogs  snellas akselerasjon $a = \ddot{r} = r\ddot{\omega}$ n r $\theta > \theta_0$

Tips: N_2, \parallel ; $N_2, \text{rot. om CM}$; $f = \mu_k N$

29.09.14

Eks 4: Snooker [LL 6.7]



Kort st t:

$$F \cdot \Delta t = \Delta p = M V_0 \quad (N2)$$

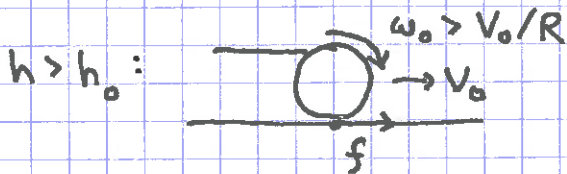
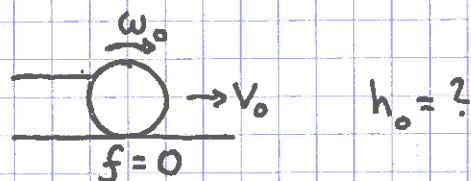
$$\tau \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0 \quad \left. \begin{array}{l} (N2, \text{rot.} \\ \text{om CM}) \end{array} \right\}$$

$$\tau = F \cdot h$$

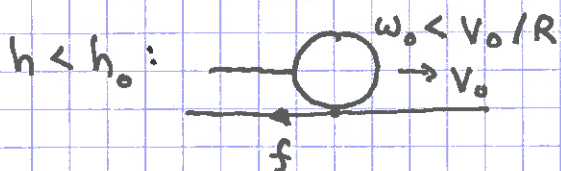
($F \gg f$ i st tet)

Etter st tet:

Ren rulling hvis $h = h_0$, $V_0 = \omega_0 R$:

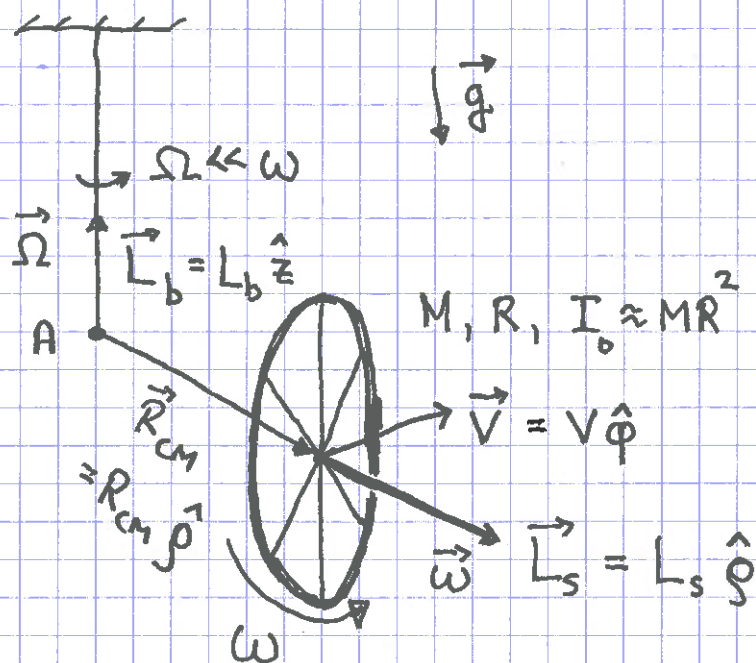


Sluring



Sluring

Etter hvert ren rulling



Tallverdier, sykkelhjul:

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{CM} \approx 0.2 \text{ m}$$

Målt på forelesn:

$$T_{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega} = 4.4 \text{ s}$$

Oppgave: Beregn $T_{\omega} = 2\pi/\omega$.

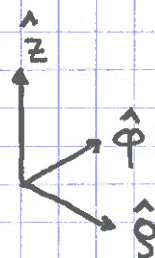
Løsning:

A = valgt ref. punkt ; $\vec{r}_0 = \vec{r}_A = 0$

N2, rot. mhp A: $\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A/dt$

Tyngden $M\vec{g}$ har armen \vec{R}_{CM} mhp A

$$\Rightarrow \vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} Mg \hat{\phi}$$



(Snordraget \vec{S} har ingen arm mhp A.)

N1 vertikalt: $\vec{S} + M\vec{g} = 0$; $|\vec{S}| = Mg$

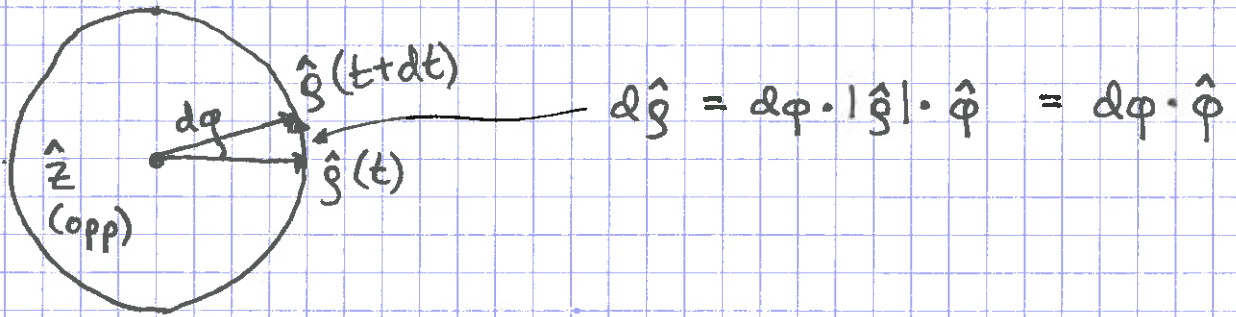
Hjulets dreieimpuls (mhp A):

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega} \\ &= R_{CM} MV \hat{z} + MR^2 \omega \hat{s} \end{aligned}$$

⇒ \vec{L}_b er konstant (neglisjerer friksjon)

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d\vec{L}_S}{dt} = MR^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = MR^2 \omega \frac{d\hat{g}}{dt}$$

⇒ $d\vec{\omega}$ (og $d\hat{g}$) må peke i retning $\hat{\phi}$, dvs som \vec{z} :



$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_A = MR^2 \omega \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} = MR^2 \omega \Omega \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \underbrace{R_{cm} Mg}_{\tau} = \underbrace{MR^2 \omega \Omega}_{\dot{L}_A} \Rightarrow \omega = R_{cm} g / R^2 \Omega$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_\Omega}}}$$

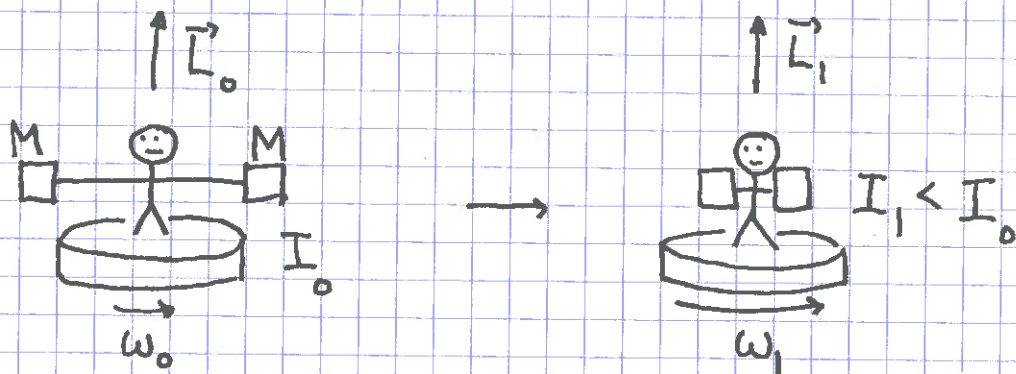
Med tallverdier: ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$)

$$T_\omega = \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 4.4} = \underline{\underline{0.40 \text{ s}}}$$

Rimelig: ca 2 1/2 omdreining pr sekund.

Eks 6: Piruett

[YF 10.6; LL 6.5]

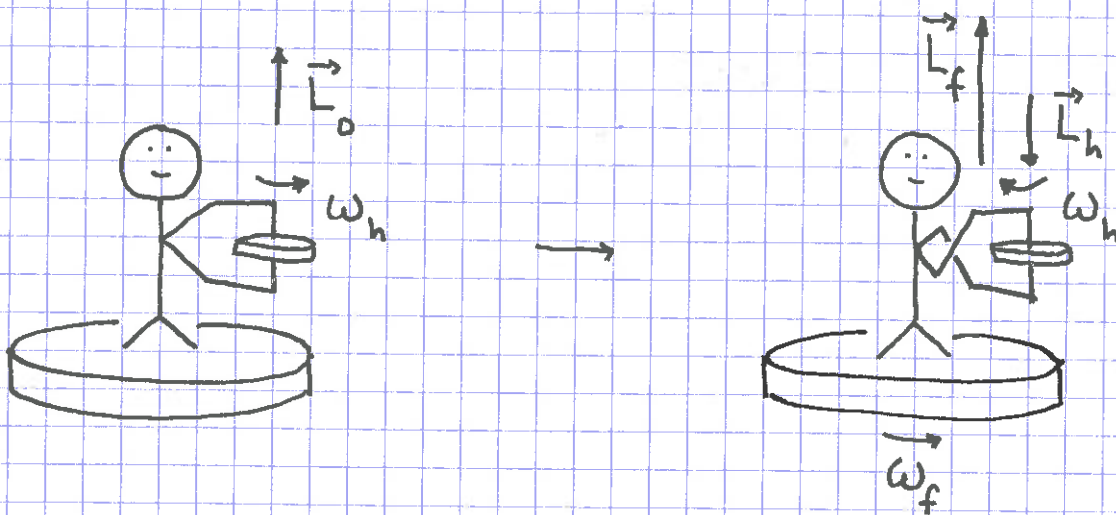


$$\tau_{\text{ytte}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{L}_1 \Rightarrow I_0 \omega_0 = I_1 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{I_0}{I_1} \omega_0 > \omega_0$$

[Mek. energi øker : $K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 > \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = K_0$.

Vis dette! Forklar hvorfor!]

Eks 7: Dreieimpulsbevarelse for hjul + preleser (+ stol)



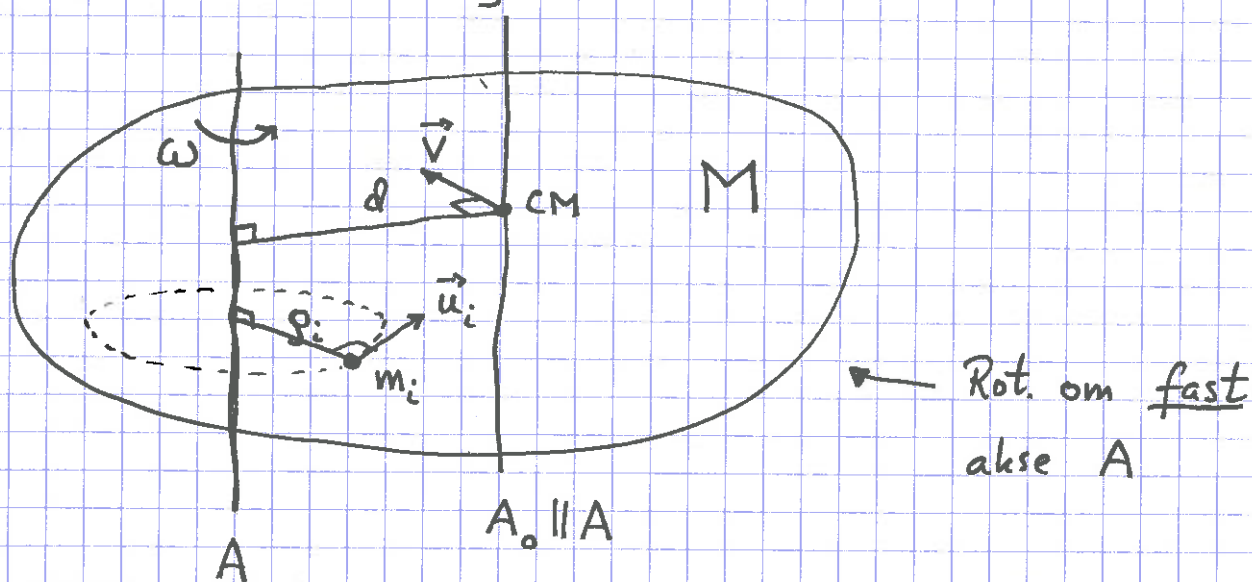
$$\tau_{\text{ytte}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_f + \vec{L}_h = \vec{L}_0$$

$$\Rightarrow \vec{L}_f = \vec{L}_0 - \vec{L}_h = 2\vec{L}_0$$

Rotasjon av stivt legeme om akse

med fast orientering

[YF 10.5; LL 6.2, 6.4]

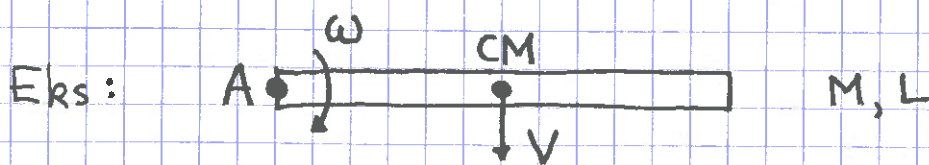


$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \omega^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} I \omega^2}}$$

Steiners sats: $I = I_0 + Md^2$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 \stackrel{V = \omega \cdot d}{=} \underline{\underline{\frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2}}$$

(som utledet generelt; se s. 40)



Tynn stav, masse M , lengde L , rot. om A .

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} M L^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{6} M L^2 \omega^2$$

ert. ($V = \omega L/2$)

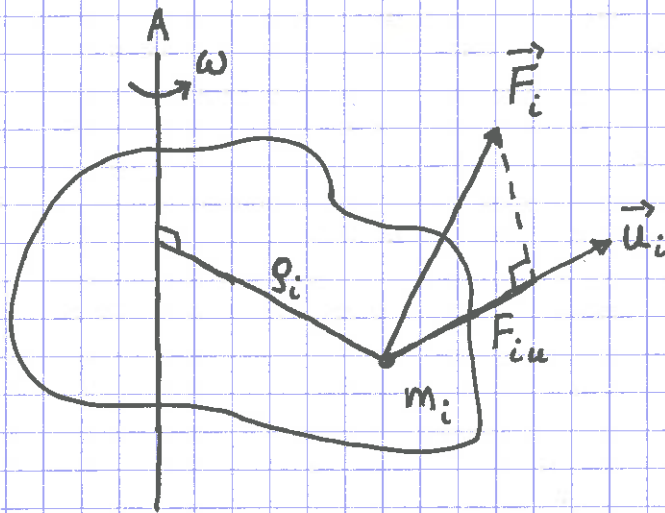
$$K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} M L^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M (\omega L/2)^2$$

$$= \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8} \right) M L^2 \omega^2 = \frac{1}{6} M L^2 \omega^2$$

Samme svar!

N2, rot. om fast akse:

(64)



Tilført effekt:

$$\begin{aligned} P &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{u}_i \stackrel{N2}{=} \sum_i m_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} \cdot \vec{u}_i \stackrel{\text{som s.21}}{=} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 \quad (= \frac{dK}{dt}) \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \cdot \frac{1}{2} \omega^2 = I \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

Dessuten er:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{u}_i = \sum_i F_{iu} u_i = \left\{ \sum_i F_{iu} r_i \right\} \omega = \tau \cdot \omega$$

Dermed:

$$\boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$

Merk at dreiemomentet $\tau = \sum_i F_{iu} r_i$ her refererer til rotasjonsaksen, og ikke til et bestemt punkt (\vec{r}_0) på rot.aksen. Da gjelder alltid $\tau = I \dot{\omega}$.

Gjelder også med fast orientering av rot.aksen (som f.eks. ved ~~roll~~ rulling nedover skrånplanet, s.57)

SVINGNINGER [YF 14; LL 9]

65

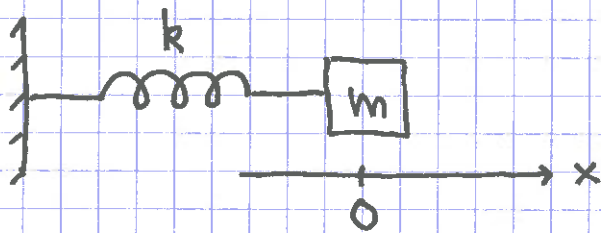
02.10.14

= oscillasjoner

= periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, luft i orgelpipe, atomer i molekyler og krystaller ...

Harmonisk oscillator [YF 14.2; LL 9.1-9.3]



Likevekt ($F = 0$) med m (CM) i $x = 0$

Strukket fjær, $x > 0$:

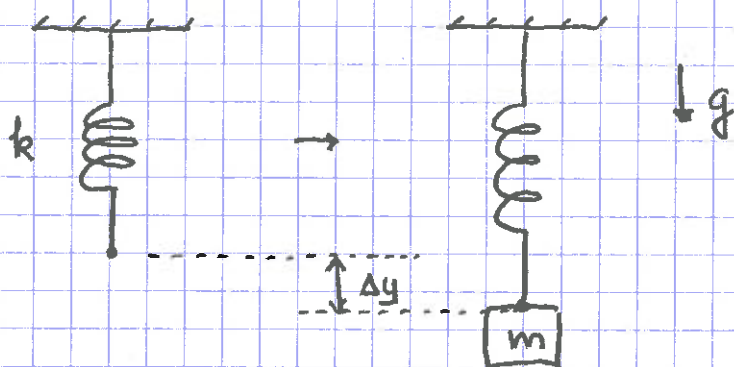
Sammenpresset fjær, $x < 0$:

Hookes lov (ideell fjær): $|F| \sim |x|$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -k \times \hat{x}}$$

Fjærkonstanten: k $[k] = \text{N/m}$

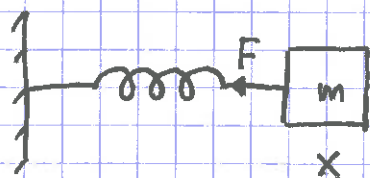
Vertikalt i tyngdefeltet:



Likevekt:

$$k \Delta y = mg$$

$$\Rightarrow \Delta y = mg/k$$



$$\text{N2: } -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\text{Innfør } \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Enkel harm. osc.
i en dimensjon

Løsning: Frie svingninger uten damping.

Ser at både $\sin \omega_0 t$ og $\cos \omega_0 t$ løser ligningen, siden $\frac{d^2}{dt^2}(\sin \omega_0 t) = -\omega_0^2 \sin \omega_0 t$, og tilsvarende for $\cos \omega_0 t$.

Generell løsning:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{ert} \quad x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$$

Int.konst. A, φ ert. B, C fastlegges med 2 initialbetingelser,

$$\text{f.eks: } x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

[$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ gir relasjoner mellom A, φ og B, C]

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

(67)

A = amplitude = max utsving fra likevekt ; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkelfrekvens ; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr svingning ; $[T] = s$

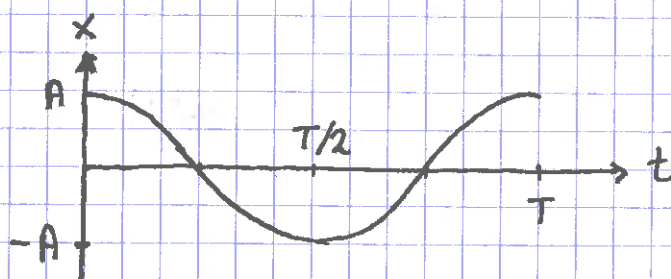
$f = 1/T$ = frekvens = svingninger pr tidsenhet ; $[f] = Hz = s^{-1}$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

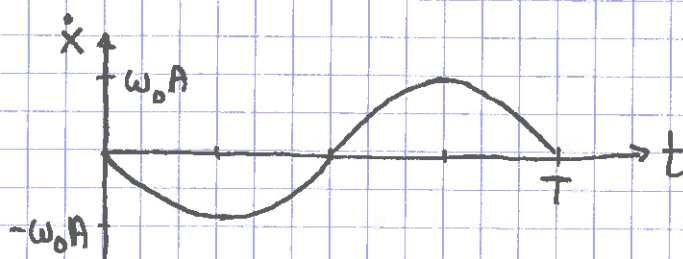
φ = fasekonstant ; $[\varphi] = 1$

Anta f.eks. $\varphi = 0$ og $A > 0$:

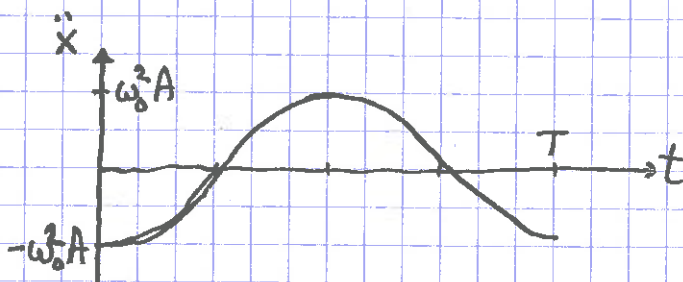
$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\omega_0 A \sin \omega_0 t \\ &= \omega_0 A \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t \\ &= -\omega_0^2 x \\ &= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \pi) \end{aligned}$$



Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]

(68)

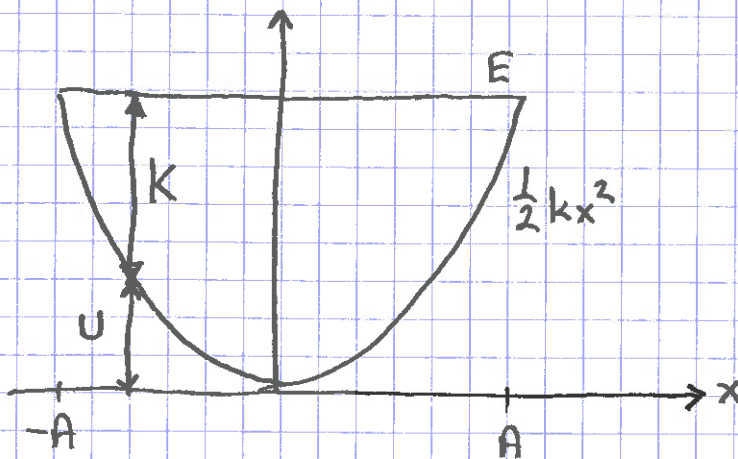
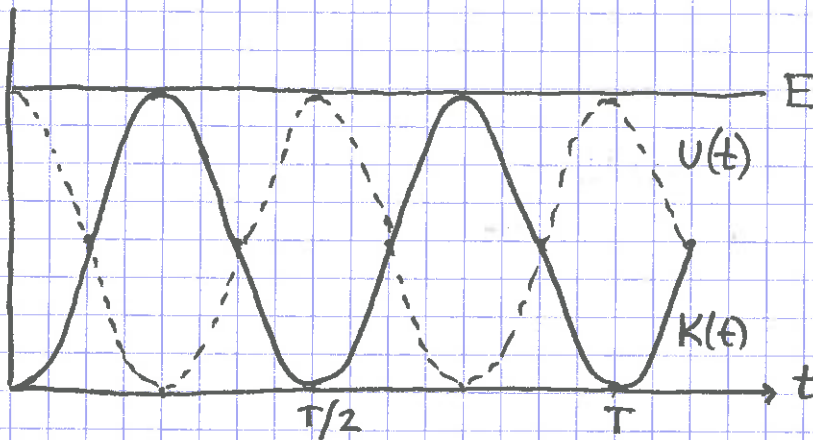
$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U = - \int_0^x F(x) dx = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

$$U(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

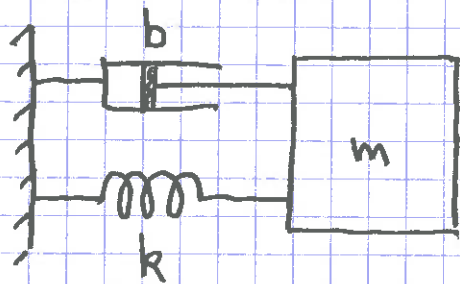
⇒ Systemet er konservativt, dvs E er bevart ($E =$ mek. energi) :

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} k A^2 = \text{konst.}$$



Dempet fri svingning [YF 14.7; LL 9.7]

Antar $f = -b\dot{x}$, dvs friksjon i fluid (langsom bevegelse).



Netto kraft på m:

$$-kx - b\dot{x}$$

$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

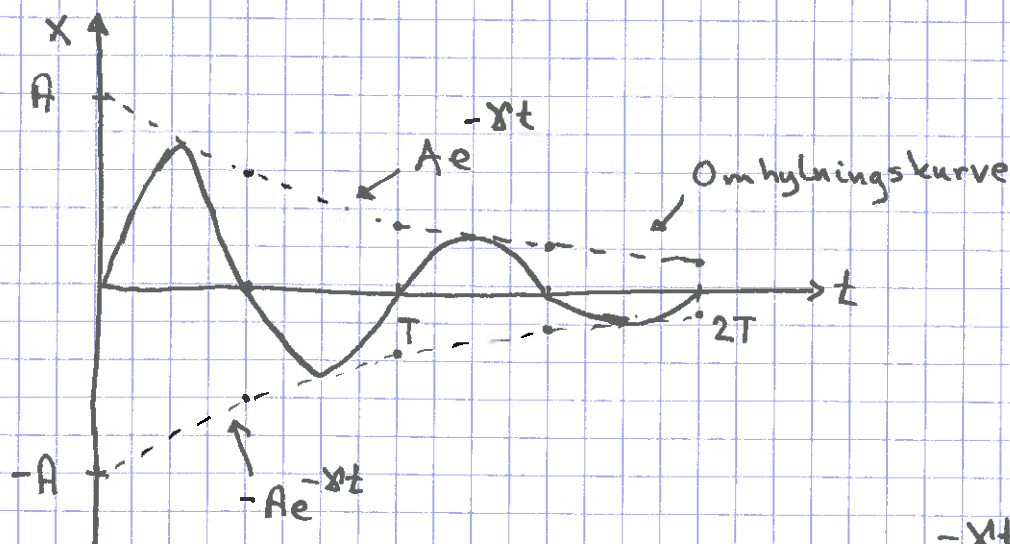
$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma = b/2m, \omega_0^2 = k/m$$
$$[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

Løsning:

Underkritisk (svak) demping, $\gamma < \omega_0$ ($b < 2\sqrt{k \cdot m}$)

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) ; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$

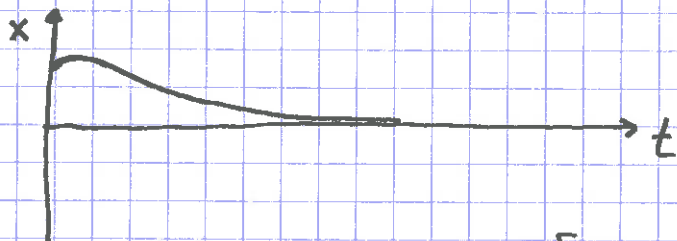


\Rightarrow Amplituden $Ae^{-\gamma t}$ avtar eksponentielt med t

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$:

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

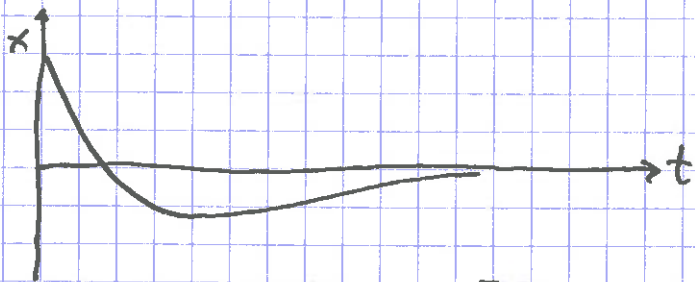


Ingen svingninger

[Her: $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) > 0$]

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$



[Her: $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) < 0$]

Eks: Støtdempere i (fjæls) bil.

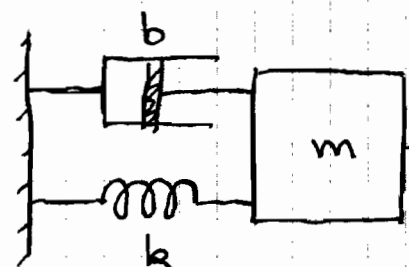
Mest behagelig med $\gamma \approx \omega_0$ på humpete veier

Trungen svingning. Resonans

[YF 14.8; LL 9.9]

(71)

06.10.14



$$F_y(t) = F_0 \cos \omega t$$

= ytre harmonisk kraft

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$\delta = b/2m$$

$$\omega_0^2 = k/m$$

Løsning:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad \text{slik at}$$

$$\ddot{x}_h + 2\delta\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0 \quad (\text{homogen løsn.})$$

$$\ddot{x}_p + 2\delta\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (\text{partikulærløsn.})$$

I starten bidrar både x_h og x_p til innsvingningsforløpet.

Etter hvert blir $t \gg 1/\delta$ slik at $e^{-\delta t} \rightarrow 0$ og $x_h \rightarrow 0$.

Da er $x(t) = x_p(t)$.

$$\text{Vi gjetter } x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Innsetting av x_p , \dot{x}_p og \ddot{x}_p i N2 gir:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega} \right\}$$

Resonans: Anta svak damping, $\gamma \ll \omega_0$. Da blir $A(\omega)$ stor hvis $\omega \approx \omega_0$, dvs ytre kraft "driver" systemet med frekvens ω lik systemets eigenfrekvens (resonansfrekvens) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

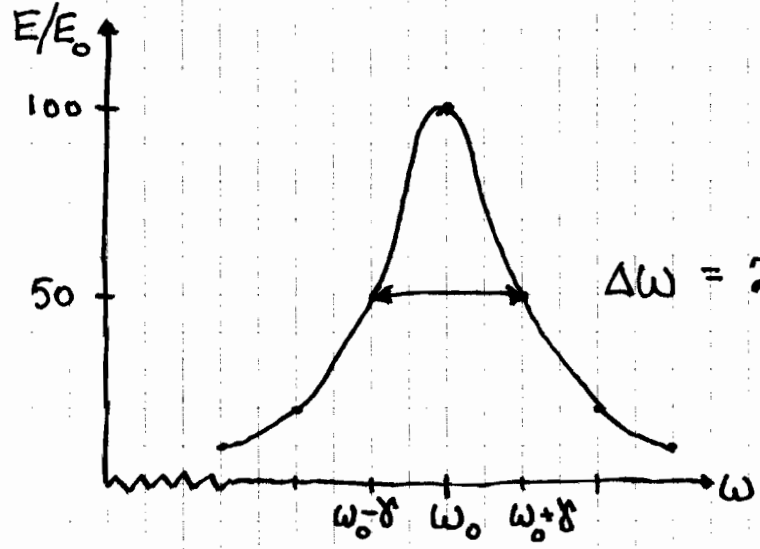
$A(\omega) \rightarrow \infty$ dersom $\gamma \rightarrow 0$ og $\omega \rightarrow \omega_0$

[Jf. Tacoma bridge, 1940]

Oscillatorens energi:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \frac{F_0^2}{m^2} \cdot \frac{\omega_0^4 / \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$
$$= \frac{F_0^2}{2k} \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

dimensjonsløs funksjon av ω



Anta $\gamma = \omega_0/20$

$\Delta\omega = 2\gamma =$ halvverdi bredden

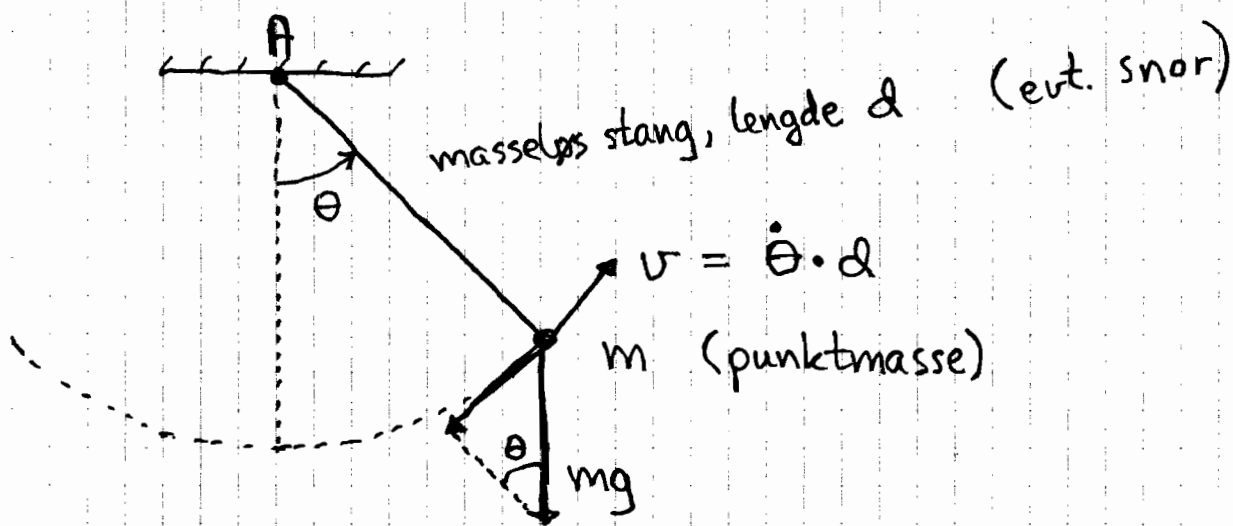
Q-faktor: Mål for hvor "skarp" resonanstoppen er.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad [Q \text{ for } \underline{q}uality!]$$

Dvs: Mindre damping \Rightarrow Smalere resonans \Rightarrow Større Q-verdi

[Her er $Q = 10$]

Matematisk pendel [YF 14.5; LL 9.6]



N2 || sirkelbanen:

$$-mg \sin \theta = m a_{||} = m \dot{v} = m \cdot d \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{d} \sin \theta = 0$$

Kan ikke løses analytisk, med mindre vi hele tiden har små utsving fra likevekt, dvs $|\theta| \ll 1$.

Da er $\sin \theta \approx \theta$, og vi har enkel harm. osc:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{g/d}$$

Svingeperiode: $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{d/g}$

Større utsving gir avvik fra harm. osc.

Vi må beholde $\sin \theta$ i ligningen, som nå må løses numerisk, f.eks slik:

Anta kjente startbetingelser $\theta(0) = \theta_0$ og $v(0) = v_0$ (74)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{d} \Rightarrow d\theta = \frac{v}{d} \cdot dt \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{v}{d} \cdot \Delta t$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{\parallel} \Rightarrow dv = a_{\parallel} \cdot dt \Rightarrow \Delta v \approx a_{\parallel} \cdot \Delta t \stackrel{(\text{her})}{=} -g \sin\theta \cdot \Delta t$$

Dermed:

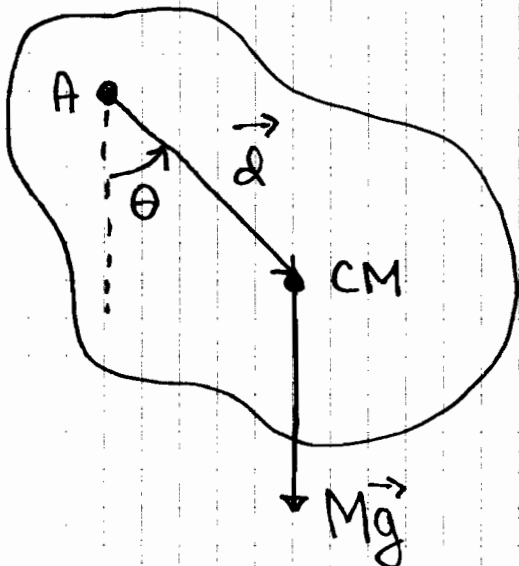
$$\theta(\Delta t) \approx \theta_0 + \frac{v_0}{d} \Delta t ; v(\Delta t) \approx v_0 - g \sin\theta_0 \cdot \Delta t$$

$$\theta(2\Delta t) \approx \theta(\Delta t) + \frac{v(\Delta t)}{d} \Delta t ; v(2\Delta t) \approx v(\Delta t) - g \sin\theta(\Delta t) \cdot \Delta t$$

osv. osv. [Eulermetoden]

Fysisk pendel

[YF 14.6 ; LL 9.6]



Stivt legeme. Masse M .
Kan svinge (frikjonsfritt) om
akse gjennom A . Tregkets-
moment I mhp rot.aksen.

Med ~~A~~ som ref. punkt
(ref.akse) er CM i
posisjon d

Bestem svingeperioden T .

(Anta små utsving, $|\theta| \ll 1$)

Ytre krefter: $M\vec{g}$, og $\vec{F}_A =$ kraften fra (75)
 akslingen på legemet. \vec{F}_A er ukjent, både abs.verdi
 og retning. [Med matematisk pendel, s.73, er \vec{F}_A
 lik snordraget, rettet langs snora/stanga, og
 dermed med null komponent normalt på snora/stanga,
 slik at kun tyngden bidrar langs sirkelbanen. Med
 fysisk pendel har \vec{F}_A generelt komponenter både
 parallelt med \vec{d} (se fig) og normalt på \vec{d} .]

Men: \vec{F}_A har ingen arm relativt akse
 gjennom A, og dermed ikke noe dreiemoment
 mhp denne akse.

Da gir N2 for rotasjon (om fast akse gjennom A):

$$\tau = I \ddot{\theta} \quad \text{med} \quad \tau = -d \cdot Mg \cdot \sin \theta$$

[Fortegnet: $\vec{\tau} = \vec{d} \times M\vec{g}$ er rettet inn i planet, dvs
 tyngdens dreiemoment gir reduisert vinkelakselerasjon
 når vinkelen θ er ~~negativ~~ positiv, som i figuren.]

$$\Rightarrow -Mgd \sin \theta = I \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} \theta = 0 \quad (|\theta| \ll 1)$$

Dvs: Harmonisk osc. med $\omega_0^2 = Mgd / I$

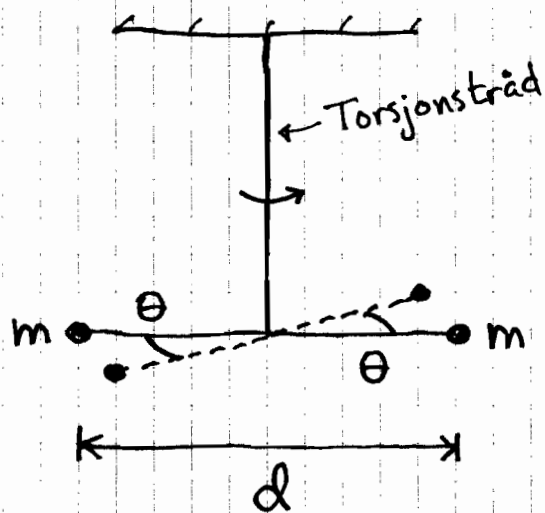
$$\Rightarrow T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{I / Mgd}$$

Steiners sats $\Rightarrow 2\pi \sqrt{(I_0 + Md^2) / Mgd}$ ($\rightarrow \infty$ når $d \rightarrow 0$,
 som ventet)

Torsjionspendel

[YF 14.4 ; LL 9.6]

(76)



Hookes lov: $|\tau| \sim |\theta|$

Tråden motsetter seg vridning og virker på pendelen [her: stang med lengde d og to masser m i hver ende; treghetsmoment $I = 2 \cdot m \cdot (d/2)^2 = md^2/2$] med dreiemoment τ prop. med vridningen θ

$$\Rightarrow \tau = -D \cdot \theta \quad [\text{YF: } \mathcal{H} ; \text{ LL: } \Gamma]$$

$$N2, \text{ rot. om trådens akse: } \tau = I \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -D \cdot \theta = I \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0^2 = D/I$$

$$\Rightarrow \text{Svingeperiode: } T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{I/D}$$

[Lab: Cavendisheksperimentet]

D = torsjonskonstanten / torsjonsstivheten

$$[D] = [1/\tau] = \frac{1}{\text{N} \cdot \text{m}} = \frac{1}{\text{J}}$$

BØLGER [YF 15, 16, 11.4; LL 10, 7.2]

(77)

Bølge = Forplantning av forstyrrelse fra likevekt

Energi og impuls forplanter seg med bølgen.

Partikler (masse) svinger, men forplanter seg ikke.

Transversale bølger: partikler svinger \perp forplantn.retningen

Longitudinale $\text{---} \parallel \text{---}$: $\text{---} \parallel \text{---}$ \parallel $\text{---} \parallel \text{---}$

Eksempler:

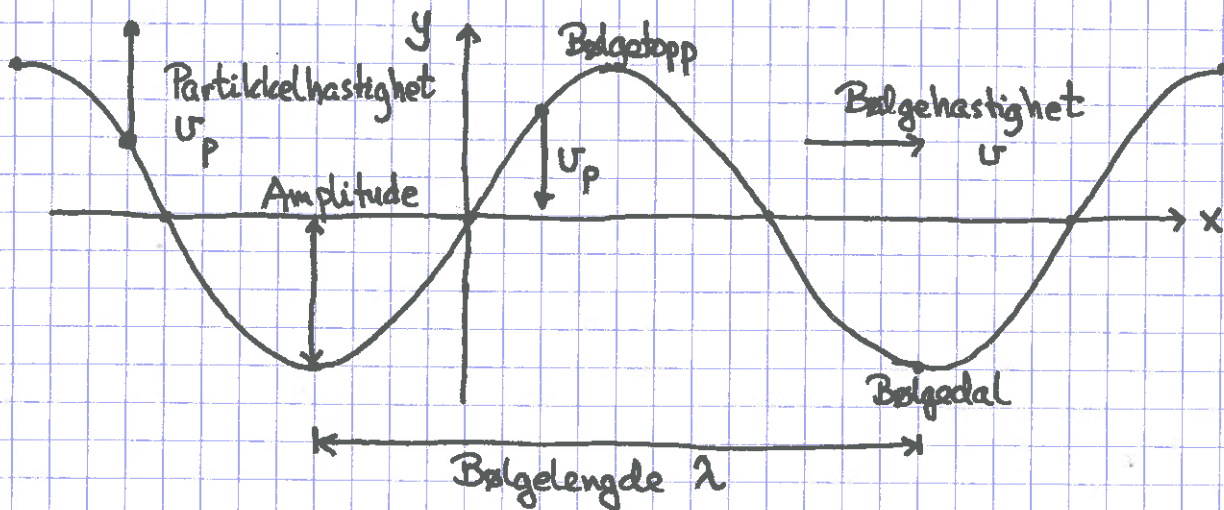
| Bølgetype | Hva svinger? | T eller L? |
|--|---|----------------------------|
| Bølger på streng | Strengelamenter | T |
| Bølger i fjær | Fjær $\text{---} \parallel \text{---}$ | T eller L |
| Lydbølger | Molekyler i mediet (gass, væske, fast stoff) | L |
| Overflatebølger (Grenseflatebølger) | Partikler i/nær grenseflaten (f.eks vann) | T og L: sirkelbevegelse |
| Elektromagnetiske bølger | Elektrisk felt \vec{E} og magnetfelt \vec{B} | T |

Harmonisk bølge [YF 15.2, 15.3; LL 10.2]

13.10.14

78

Ser på transversal bølge på (uendelig lang) streng.
 $y(x,t)$ = utsving fra likevekt ($y=0$) av strengement
i posisjon x ved tidspunkt t



T = periode = tiden det tar for bølgemønsteret å flytte seg
en bølglengde λ

= tiden det tar for et gitt strengement å
utføre en hel svingning

\Rightarrow Bølgehastighet: $v = \lambda / T$ (Kalles også fasehastighet)

f = frekvens = antall svingninger (for gitt strengement)
pr tidsenhet

$$\Rightarrow f = 1/T$$

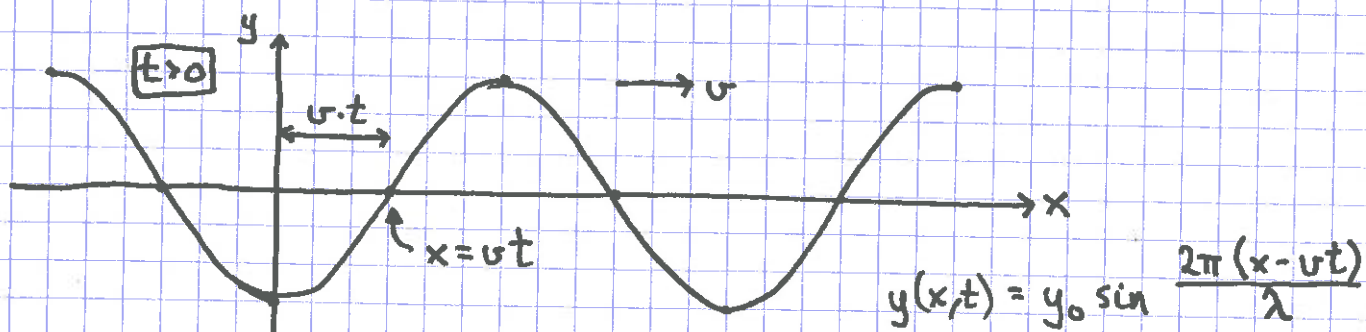
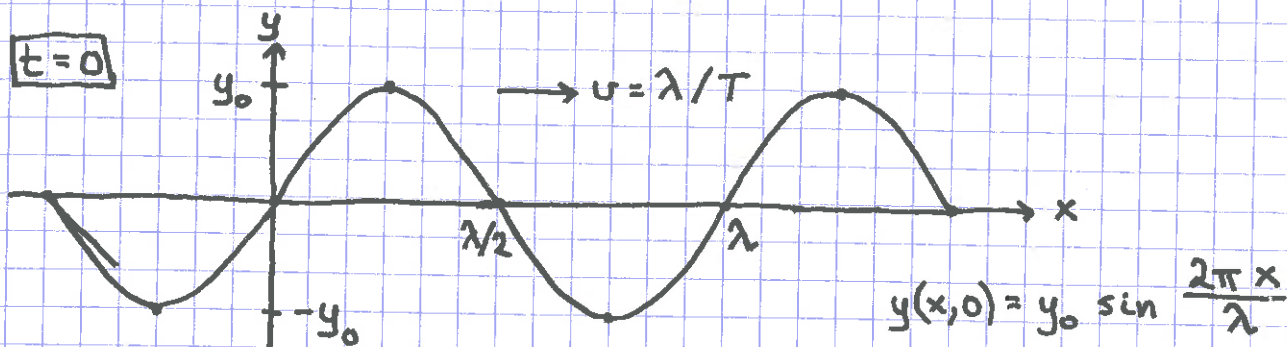
ω = vinkel frekvens = bølgens faseendring (for gitt
strengement) pr tidsenhet

$$\Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi / T \quad (\text{faseendring } 2\pi \text{ pr svingning})$$

Partikkelhastighet: $v_p = dy/dt$

79

Matematisk form på $y(x, t)$:



$$v = \lambda/T = \lambda \cdot \omega/2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v = \omega$$

Innfør bølgetallet $k = 2\pi/\lambda =$ bølgens faseendring (for gitt tidspunkt) pr lengdeenhet

$$[k] = m^{-1}$$

Dermed:

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

Harmonisk bølge som forplanter seg i positiv x-retning med hastighet $v = \lambda/T = \omega/k$

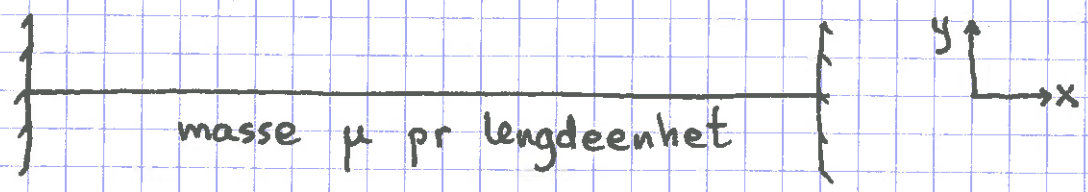
Hvis forplantning i negativ x-retning:

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$$

Hvis $y(0, 0) \neq 0$: $y(x, t) = y_0 \sin(kx \pm \omega t + \phi)$; $\phi =$ fasekonstant

Transversal bølge på streng [YF 15.4; LL 10.1]

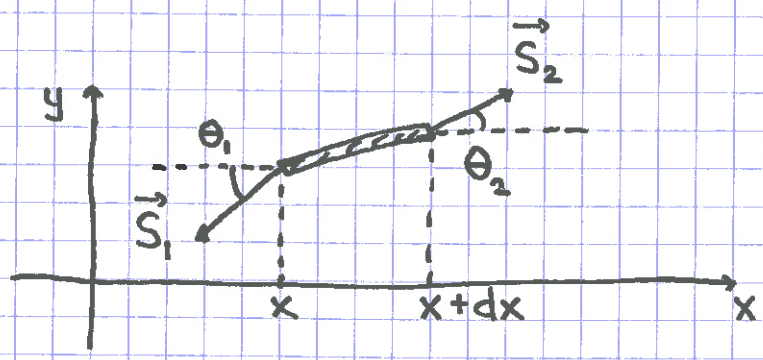
Likevekt: Horisontal streng, utsving $y=0$ overalt, strekk-kraft $S \gg$ strengens tyngde, som neglisjeres.



Braker N2 til å finne ut hvordan en forstyrrelse fra likevekt forplanter seg langs strengen.

Antagelser: Små utsving; Ingen horisontal bevegelse av masse.

⇒ konstant $S_x = S$ overalt.



Strengeløst mellom x og $x + dx$, masse $dm = \mu \cdot dx$

$$N2: \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = dm \cdot \vec{a}$$

Horisontalt: $-S_1 \cos \theta_1 + S_2 \cos \theta_2 = 0$

$$\Rightarrow S_1 \cos \theta_1 = S_2 \cos \theta_2 = S_x = S$$

Vertikalt: $S_2 \sin \theta_2 - S_1 \sin \theta_1 = dm \cdot \ddot{y}$

Divisjon med hvor $S = S_2 \cos \theta_2$, $S = S_1 \cos \theta_1$ og S gir

$$\tan \theta_2 - \tan \theta_1 = \mu \cdot dx \cdot \ddot{y} / S$$

Vi ser at $\tan \theta = dy/dx$ (= strengens "helning") (81)

Partiell derivasjon

Her avhenger utsvinget y av to variable, x og t .

Da kan vi spørre om ulike ting:

- 1) Hvordan endres y hvis vi endrer posisjonen fra x til $x+dx$, med tiden t holdt konstant?
- 2) Hvordan endres y hvis tiden endres fra t til $t+dt$, med posisjonen x holdt konstant?

Svar på 1) er selvsagt $dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx$, der dy/dx er den deriverte av y mhp x , og som sagt, med variabel nr to, tiden t , holdt konstant.

Nærmest som en påminnelse om at andre variable (enn x) skal betraktes som konstanter (her: t), bruker vi notasjonen

$\frac{\partial y}{\partial x}$ def derivert av y mhp x ; andre variable holdes konstant

Vi kaller $\partial y / \partial x$ for den partiellderiverte av y mhp x .

Tilsvarende: Svar på 2) er $dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt$, med dy/dt lik den deriverte av y mhp t , med x holdt konstant.

Vi skriver $\partial y / \partial t$ og kaller dette for den partiellderiverte av y mhp t .

Eks: Hvis $y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$, blir

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k y_0 \cos(kx - \omega t) \quad \text{og} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_0 \cos(kx - \omega t)$$

For strengen : $\tan \theta = \partial y / \partial x$
 $\ddot{y} = \partial^2 y / \partial t^2$

Dermed:

$$\frac{(\partial y / \partial x)_{x+dx} - (\partial y / \partial x)_x}{dx} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Her er, pr def., venstre side lik den deriverte av $\partial y / \partial x$ mhp x , med andre ord lik $\partial^2 y / \partial x^2$.

Dermed:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

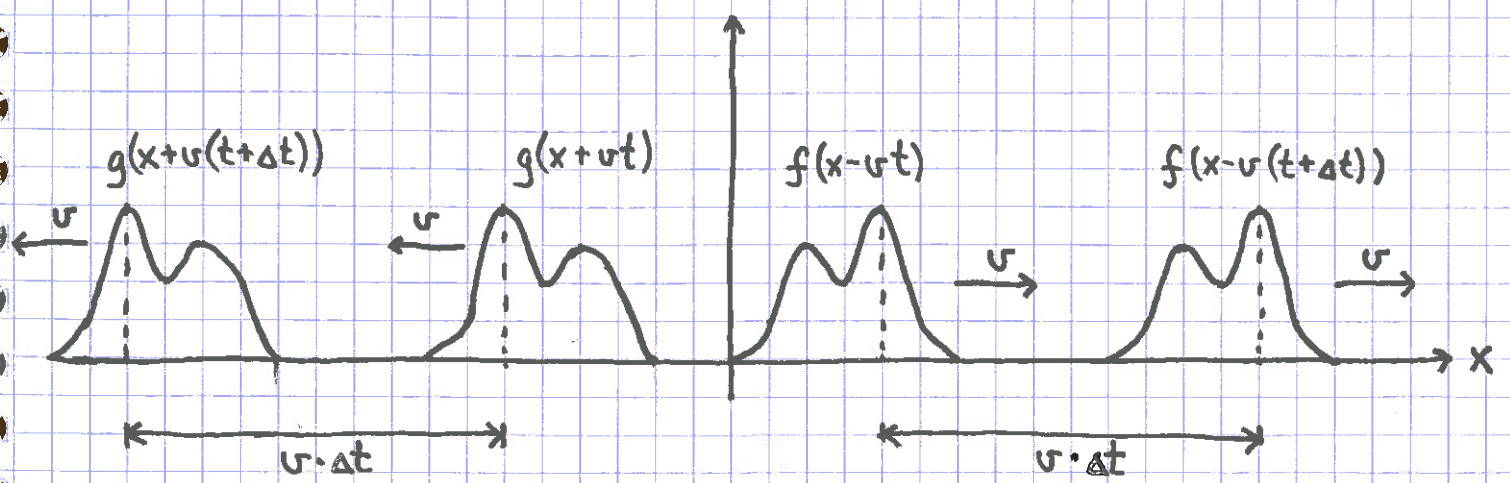
Bølgligning for transv. utsving $y(x,t)$ på streng med strekkkraft S og masse μ pr lengdeenhet.

[Linear 2.ordens partiell diff. ligning]

Generell løsning: $y(x,t) = f(x-ut) + g(x+ut)$

[Her er f og g vilkårlige kontinuerlige og to ganger deriverbare funksjoner.]

Her er $f(x-ut)$ og $g(x+ut)$ bølger (forstyrrelser fra likevekt) som forplanter seg i hhv positiv og negativ x -retning:



La oss vise at $f(x-ut)$ og $g(x+ut)$ [og dermed også summen av disse; superposisjonsprinsippet] er

løsninger av bølgeligningen. Innfør $z = x - ut$ og

bruk kjerneregelen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot (-u)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial z} \cdot (-u) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \cdot (-u) \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot u^2$$

Dermed: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, som var det vi skulle vise.

Tilsvarende, med $z = x + ut$ og kjerneregelen:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \cdot u^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}; \quad \text{OK.}$$

N2 for strengementet gir $\partial^2 y / \partial x^2 = (\mu/s) \partial^2 y / \partial t^2$,

som dermed har generell løsning

$$y(x,t) = y_1(x-ut) + y_2(x+ut)$$

med bølgehastighet $u = \sqrt{S/\mu}$

Eks: $M = 0.776 \text{ kg}$, $L = 8 \text{ m}$ og $S = 18 \text{ N} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{S}{M/L}} = \underline{13.4 \text{ m/s}}$

Elastisitet

[YF 11.4; LL 7.2]

16.10.14

84

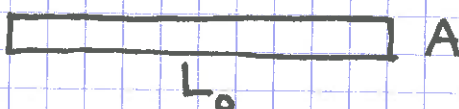
Hookes lov (linear respons):

Resulterende deformasjon (relativ lengde- eller volumendring) er proporsjonal med mekanisk spenning (kraft pr flateenhet).

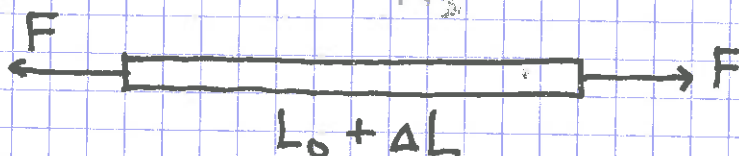
Elastisk modul def. $\frac{\text{Mekanisk spenning}}{\text{Relativ deformasjon}}$ ($\frac{\text{Stress}}{\text{Strain}}$)

Strekking/sammenpressing av tynn stang:

Likevekt:



Strukket:



Hookes lov:

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \text{elastisitetsmodulen} \quad (\text{Evt: Youngs modul } Y)$$

$$[E] = \text{N/m}^2 = \text{Pa} \quad (\text{pascal})$$

Som ideell fjær, med fjærkonstant

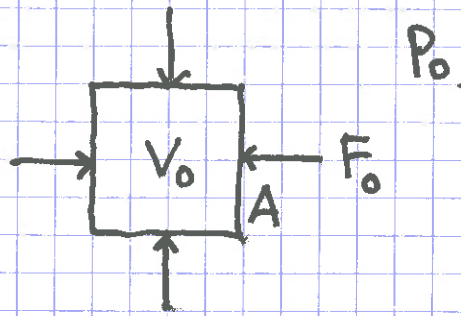
$$k = F/\Delta L = E \cdot A/L_0$$

Eks: Stål, $E \approx 200 \text{ GPa}$

Grafen, $E \approx 1050 \text{ GPa}$

Volumkompressibilitet:

Likevekt:

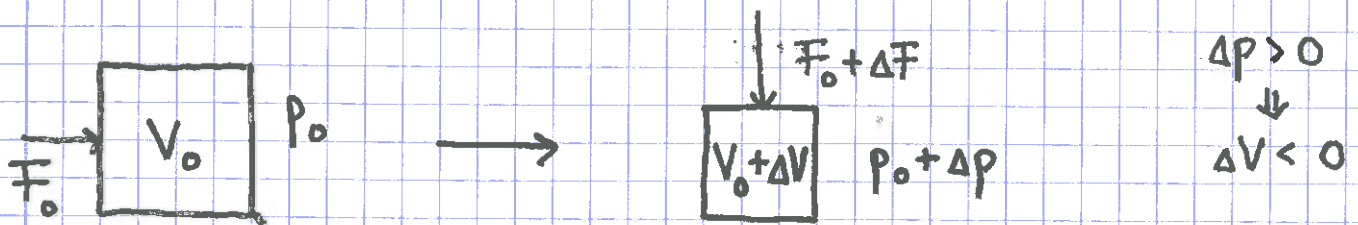


Likevektstrykk: $p_0 = F_0 / A$; isotrop i et fluid

$\Rightarrow \vec{F}_0$ står normalt på flaten A

(\vec{F}_0 = netto kraft på A fra omgivende medium)

Trykkøkning \Rightarrow Volumreduksjon:



Hookes lov:
$$B = - \frac{\Delta F / A}{\Delta V / V_0} = - \frac{\Delta P}{\Delta V / V_0}$$

= bulkmodulen (B^{-1} = kompressibiliteten)

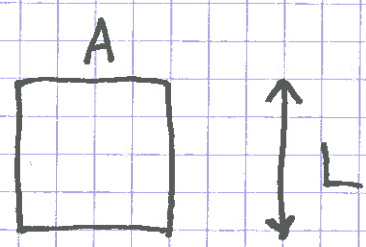
$[B] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$

- Eks: Stål, $B \approx 160 \text{ GPa}$
- Vann, $B \approx 2 \text{ GPa}$
- Luft, $B \approx 10^{-4} \text{ GPa}$

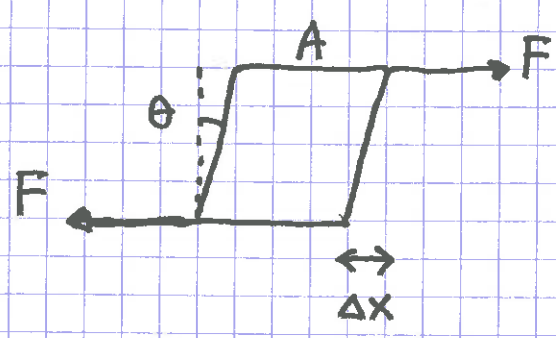
$\Rightarrow B_{\text{gass}} \ll B_{\text{væske}} < B_{\text{fast stoff}}$

Skjærmodul:

Likvekt:



Med skjærkrefter:



Hookes lov:
$$G = \frac{F/A}{\Delta x/L} = \frac{F/A}{\tan \theta}$$

$G =$ skjærmodulen ; $[G] = \text{Pa}$

Eks: Stål, $G \approx 80 \text{ GPa}$

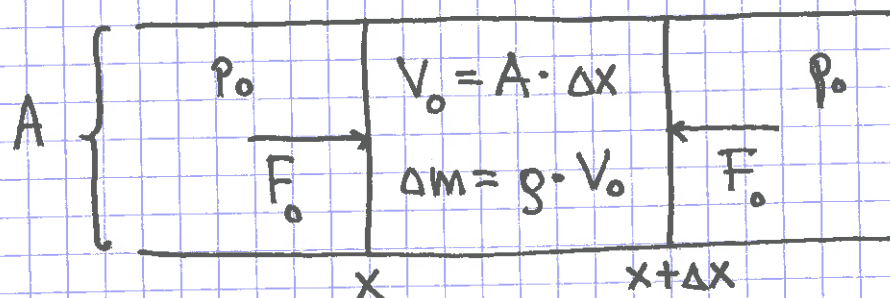
$\Rightarrow E \sim B > G$ (for de fleste faste stoffer)

Longitudinale mekaniske bølger. Lyd

87

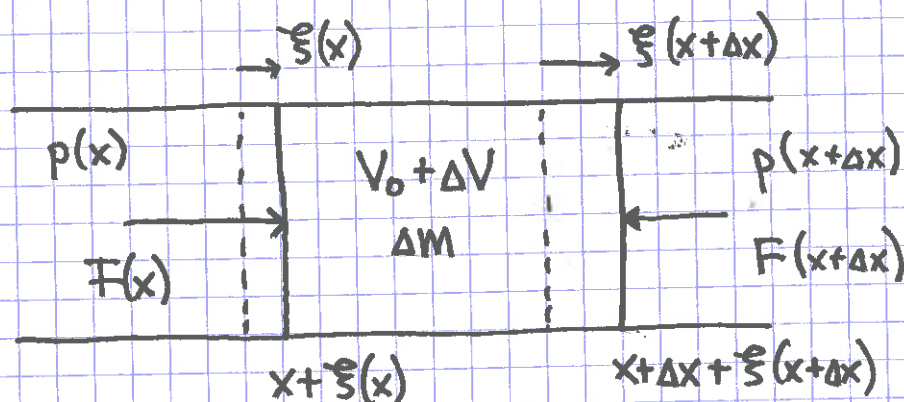
[YF 16.1, 16.2; LL 10.6]

Ser på rør fyldt med fluid (gass eller væske):



Likevekt
($\rho = \Delta m / V_0 =$
massefylthet)

Forstyrrelse fra likevekt:



$$p(x) = p_0 + \Delta p(x), \quad p(x + \Delta x) = p_0 + \Delta p(x + \Delta x)$$

$$\Delta V = [\xi(x + \Delta x) - \xi(x)] \cdot A = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot A$$

$$\Delta p(x) = \frac{F(x) - F_0}{A}, \quad \Delta p(x + \Delta x) = \frac{F(x + \Delta x) - F_0}{A}$$

$$\Rightarrow \text{Netto kraft p\aa } \Delta m: F(x) - F(x + \Delta x) = [\Delta p(x) - \Delta p(x + \Delta x)] \cdot A$$

Fra s. 85: $\Delta p = -B \cdot \Delta V / V_0$

$$\Rightarrow \Delta p(x) = -B \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x \cdot \Delta x \cdot A / \Delta x \cdot A = -B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x$$

Bruker N2 på Δm :

(88)

$$\begin{aligned}\Delta m \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= F(x) - F(x+\Delta x) \\ &= [\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x)] \cdot A \\ &= -B \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \right] \cdot A \\ &= +B \cdot \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \cdot \Delta x \cdot A\end{aligned}$$

$$\Delta m = \rho V_0 = \rho A \Delta x$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Dvs: Utsvinget $\xi(x,t)$ fra likevekt oppfyller bølgligningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

med bølgehastighet $v = \sqrt{B/\rho}$

Eks:

$$\text{Luft: } v = \sqrt{\frac{1.42 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1.29 \text{ kg/m}^3}} = 332 \text{ m/s}$$

$$\text{Vann: } v = \sqrt{\frac{2.2 \cdot 10^9 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg/m}^3}} = 1483 \text{ m/s}$$

$$\text{Stål: } v = \sqrt{\frac{B + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{(160 + \frac{4}{3} \cdot 80) \text{ GPa}}{7800 \text{ kg/m}^3}} = 5847 \text{ m/s}$$

Med tynn stang (av fast stoff):

$$E \text{ erstatter } B \Rightarrow v = \sqrt{E/\rho}$$

Seismiske bølger:

Jordskjelv, vulkanutbrudd osv. genererer både transv. og longit. bølger i jordskorpa og jordas indre, hhvis såkalte S-bølger (sekundære) og P-bølger (primære).

$$v_s = \sqrt{G/\rho}, \quad v_p = \sqrt{(B + 4G/3)/\rho} > v_s$$

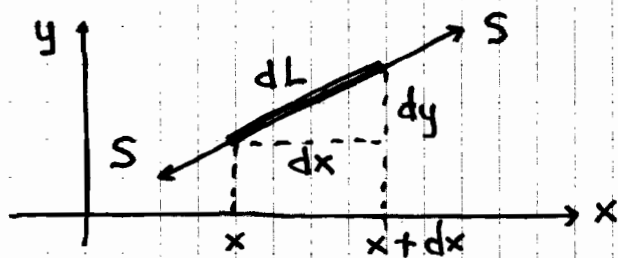
\Rightarrow P-bølgene ankommer før S-bølgene ved jordskjelv

Kan bestemme både posisjon og styrke ved kombinert studium av P- og S-bølgene.

Energi ved bølgeforplantning [YF15.5; LL 10.5]

90

Ser på transversal bølge på streng:



Strengeløst, længde dL ,
masse $dm = \mu \cdot dx$, strekkraft S .

$$\text{Kin. energi: } dK = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

$$\text{Pot. energi: } dU = S \cdot \underbrace{(dL - dx)}_{= \text{förlängelsen}}$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

For små $|\alpha|$ er $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha$

$$\Rightarrow dL \approx dx \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} \Rightarrow dL - dx \approx \frac{1}{2} dx \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

$$\Rightarrow dU \approx \frac{1}{2} S dx \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

\Rightarrow Mek. energi pr længdeenhed blir:

$$\varepsilon = \frac{dE}{dx} = \frac{dK}{dx} + \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Vi har $y(x,t) = y(x \pm vt)$, og dermed $\frac{\partial y}{\partial t} = \pm v \frac{\partial y}{\partial x}$.

Videre er $S = \mu \cdot v^2$. Dermed:

$$\varepsilon = \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \pm \mu v \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$[\varepsilon] = \text{J/m}$$

Hvis y avhenger av $x \pm vt$, må også $\partial y / \partial t$ og $\partial y / \partial x$ avhenge av $x \pm vt$.

Dvs: $\epsilon(x,t) = \epsilon(x \pm vt)$

Da oppfyller energitetheten bølgeligningen,

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2},$$

og energien forplanter seg med hastighet v i bølgens forplantningsretning.

Med plan longitudinal bølge (lydbølge):

1D \rightarrow 3D ; $\mu \rightarrow \rho =$ masse pr volumenet;

$\epsilon = \Delta E / \Delta x \rightarrow \Delta E / \Delta V =$ energi pr volumenet;

$y \rightarrow \xi =$ molekylenees midlere utsving fra likevekt

$$v = \sqrt{S/\mu} \rightarrow v = \sqrt{B/\rho}$$

$$\Rightarrow \epsilon(x,t) = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \pm \rho v \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$[\epsilon] = J/m^3$$

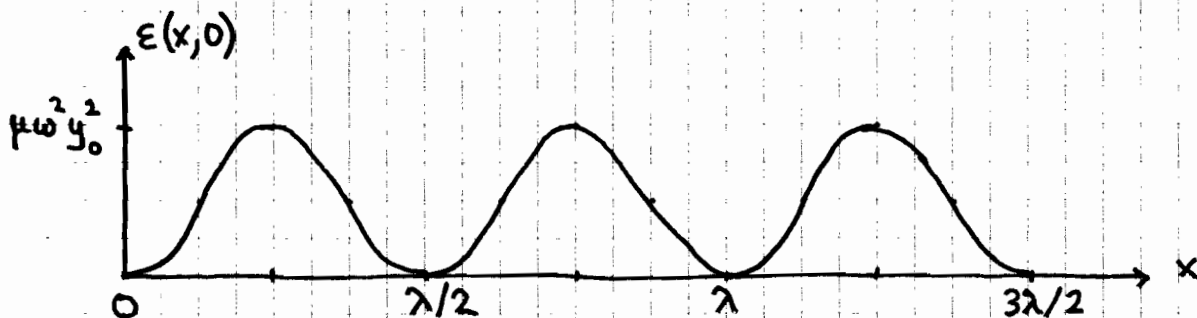
Eks: Harmonisk bølge

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad v = \frac{\omega}{k}$$

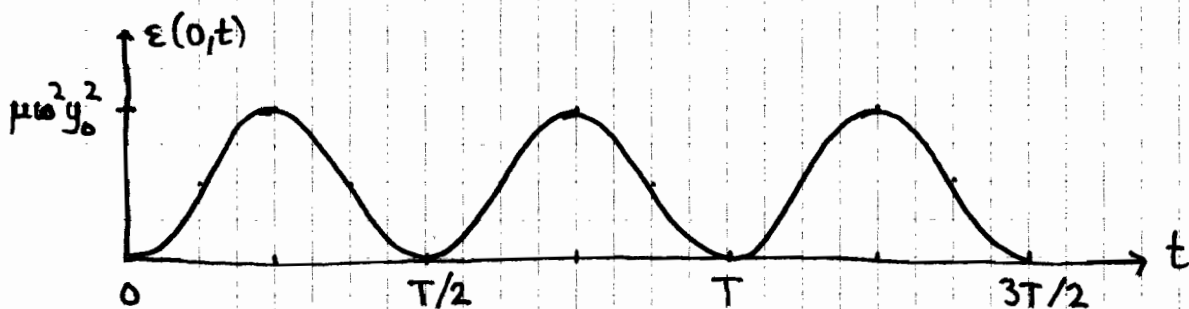
$$\frac{\partial y}{\partial x} = -k y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \epsilon(x,t) &= \mu v^2 k^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \\ &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \{1 - \cos[2kx - 2\omega t]\} \end{aligned}$$

Øyeblikksbilde ved $t=0$: $\epsilon(x,0) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 (1 - \cos \frac{4\pi}{\lambda} x)$



Swingning av ϵ ved fast posisjon $x=0$: $\epsilon(0,t) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 (1 - \cos \frac{4\pi}{T} t)$



Midlere energitetthet

For harmonisk bølge ser vi umiddelbart fra figurene over at $\bar{\epsilon} = \langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2$. Her angir $\bar{\epsilon}$ en rømlig middelværdi og $\langle \epsilon \rangle$ et tidsmiddel.

Generelt, for periodisk oppførsel med romlig periode λ og tidsperiode T :

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^\lambda \epsilon(x,t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \epsilon(x,t) dx$$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int_0^T \epsilon(x,t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon(x,t) dt$$

Med harmonisk bølge er $\epsilon(x,t) \sim \sin^2(kx - \omega t)$, eventuelt $\epsilon(x,t) \sim 1 - \cos(2kx - 2\omega t)$. Siden $\cos(2kx - 2\omega t)$ svinger mellom -1 og $+1$, blir middelverdien null, enten vi midler i rom eller tid.

Alternativt: Siden $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$, og $\langle \sin^2\phi \rangle = \langle \cos^2\phi \rangle$, følger at middelverdien av $\sin^2(kx - \omega t)$ er lik $1/2$, enten vi midler i rom eller tid.

Følgelig:
$$\bar{\epsilon} = \langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2$$

Tilsvarende, for plan harmonisk lydølge:

$$\bar{\epsilon} = \langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

Bølgens intensitet I

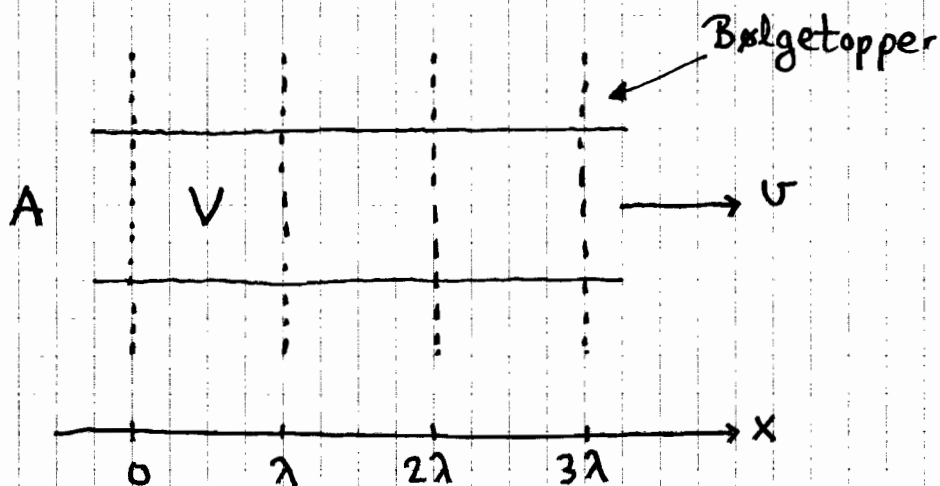
[YF 16.3; LL 10.5]

(94)

I = overført energi pr tidsenhet og pr flateenhet
= overført effekt pr flateenhet

$$[I] = \text{J/s} \cdot \text{m}^2 = \text{W/m}^2$$

Med plan harmonisk lydølge:



Energi i volum $V = A \cdot \lambda$ mellom $x=0$ og $x=\lambda$:

$$\bar{\epsilon} \cdot A \cdot \lambda$$

Denne energien passerer flaten med areal A ved $x=\lambda$ i løpet av tiden T . Dermed:

$$I = \frac{\bar{\epsilon}}{A} = \frac{\bar{\epsilon} A \lambda / T}{A} = \underline{\underline{\bar{\epsilon} \cdot v}} \quad (v = \lambda / T)$$

Desibelskalaen

Knapt hørbar lyd : $I = I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$; velges som standard referanse

Smertegrensen : $I = 1 \text{ W/m}^2$

Dvs: Stort spenn; hensiktsmessig med logaritmisk skala:

$$\beta = \# \text{ dB} \stackrel{\text{def}}{=} 10 \log \frac{I}{I_0}$$

 (Lydtrykksnivå)

Høregrensen: $10 \log (I_0/I_0) = 0 \text{ dB}$

Normal samtale: $10 \log (10^{-6}/10^{-12}) = 10 \cdot 6 = 60 \text{ dB}$

Smertegrensen: $10 \log (1/10^{-12}) = 10 \cdot 12 = 120 \text{ dB}$

Bølgeforplantning i vilkårlig retning

Plan harmonisk lydølge, forpl. i x-retning:



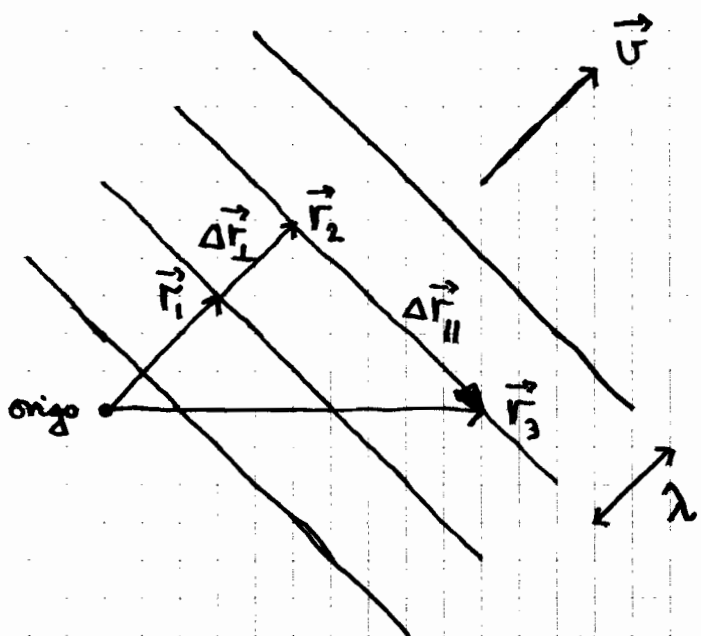
$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi/T, \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

Bølgefront = Flate med konstant fase

 (For et gitt tidspunkt t)

Her: Plan \perp x-aksen

Plan harmonisk bølge i vilkårlig retning: (76)



$$\vec{s}(\vec{r}, t) = \vec{s}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Longitudinal bølge: $\vec{s} \parallel \vec{v}$

Transversal ---: $\vec{s} \perp \vec{v}$

Anta f.eks. $t=0 \Rightarrow \vec{s}(\vec{r}, 0) = \vec{s}_0 \sin \vec{k} \cdot \vec{r}$

Må ha lik fase i \vec{r}_2 og \vec{r}_3

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}_2 = \vec{k} \cdot \vec{r}_3 \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \Delta \vec{r}_{\parallel} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{k} \perp \Delta \vec{r}_{\parallel} \Rightarrow \vec{k} \parallel \vec{v}$$

Dvs: Bølgetallsvektoren \vec{k} peker i bølgens forpl. retning.

Må ha faseforskjell 2π mellom \vec{r}_1 og \vec{r}_2

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}_2 = \vec{k} \cdot \vec{r}_1 + 2\pi \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 2\pi$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \Delta \vec{r}_{\perp} = 2\pi \Rightarrow \underbrace{|\vec{k}|}_{k} \cdot \underbrace{|\Delta \vec{r}_{\perp}|}_{\lambda} = 2\pi \Rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

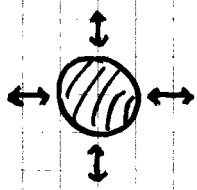
Dvs: $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{v}$

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$$

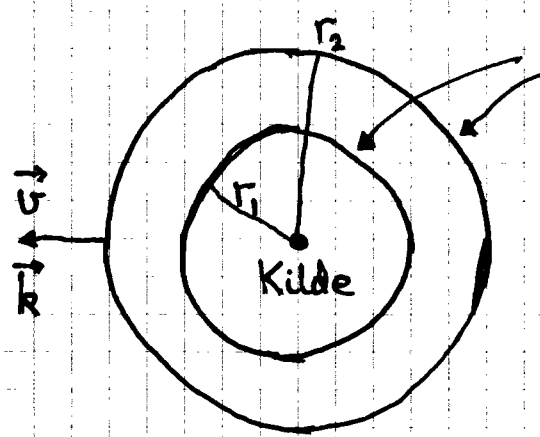
$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\lambda = 2\pi/k$$

Kulebølger



Kulesymmetrisk bølgekilde \Rightarrow Bølge som forpl. seg med lik intensitet i alle retninger



Kuleformede bølgefronter som forpl. seg radielt bort fra kilden; areal $4\pi r^2$

Pga energibevarelse må like mye energi E_1 passere kuleflaten med $r = r_1$, som energien E_2 som passerer kuleflaten med $r = r_2$.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle \quad (\text{midlere effekt})$$

$$\Rightarrow 4\pi r_1^2 \cdot I_1 = 4\pi r_2^2 \cdot I_2 \quad (I = \langle P \rangle / A)$$

$$\Rightarrow I_2 / I_1 = r_1^2 / r_2^2$$

Dvs: $I(r) \sim 1/r^2$ for kulebølger

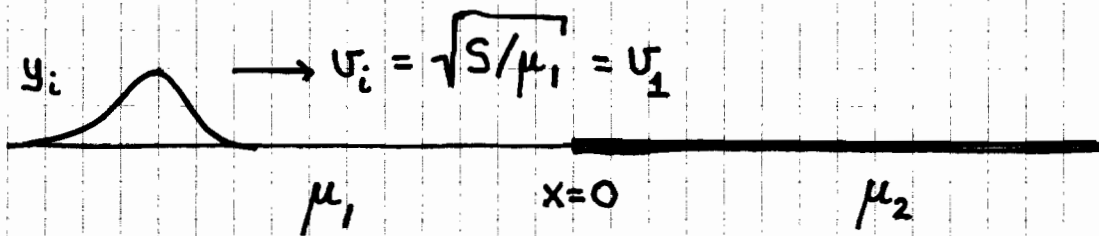
Sylindersymmetrisk bølgekilde \Rightarrow Sylinderformede bølgefronter med omkrets $2\pi r$, dvs areal A prop. med avstanden r fra kilden \Rightarrow $I(r) \sim 1/r$ for sylinderbølger

Plan bølgekilde \Rightarrow Plane bølgefronter med konstant areal A uavh. av avstanden fra kilden \Rightarrow $I = \text{konst.}$ for plane bølger

Refleksjon og transmisjon av bølge på streng

[YF 15.7 ; LL 10.3]

Bølge $y_i(x,t)$ inn mot skjøt i $x=0$:



Blir delvis reflektert og transmittert i skjøten:



Fysiske betingelser:

y og $\partial y / \partial x$ kontinuerlige (også $\partial y / \partial t$ kontinuerlig)

$$\bar{P}_i = \bar{P}_r + \bar{P}_t \quad (\text{energibevarelse; } \bar{P} = \text{midlere effekt})$$

$$y(x,t) = \begin{cases} y_i(x,t) + y_r(x,t) & \text{for } x < 0 \\ y_t(x,t) & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

Anta harmonisk bølge:

$$y_i(x,t) = y_{i0} \sin(k_1 x - \omega t)$$

$$y_r(x,t) = y_{r0} \sin(k_1 x + \omega t)$$

$$y_t(x,t) = y_{t0} \sin(k_2 x - \omega t)$$

$$y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t) \quad [\text{kont. } y]$$

99

$$\Rightarrow y_{i0} \sin(-\omega t) + y_{r0} \sin(\omega t) = y_{t0} \sin(-\omega t)$$

$$\Rightarrow y_{i0} - y_{r0} = y_{t0}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (y_i(x,t) + y_r(x,t)) \right\}_{x=0} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} y_t(x,t) \right\}_{x=0} \quad [\text{kont. } \frac{\partial y}{\partial x}]$$

$$\Rightarrow k_1 y_{i0} \cos(-\omega t) + k_1 y_{r0} \cos(\omega t) = k_2 y_{t0} \cos(-\omega t)$$

$$\Rightarrow k_1 y_{i0} + k_1 y_{r0} = k_2 y_{t0}$$

$$\Rightarrow y_{r0} = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} y_{i0} \quad ; \quad y_{t0} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} y_{i0}$$

Alternativt, siden $k = \omega/v = \frac{\omega}{\sqrt{S}} \cdot \sqrt{\mu}$:

$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} y_{i0} \quad ; \quad y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} y_{i0}$$

- $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow y_{r0} = 0, y_{t0} = y_{i0} \quad ; \quad \text{OK}$
- $\mu_2 > \mu_1 \Rightarrow y_{r0}/y_{i0} > 0 \Rightarrow y_r$ og y_i har motsatt fortegn nær $x=0$
- $\mu_2 < \mu_1 \Rightarrow y_r$ og y_i likt fortegn nær $x=0$ [$y_{t0}/y_{i0} > 0$ alltid]
- $\mu_2 \rightarrow \infty \Rightarrow y_{r0} = y_{i0}, y_{t0} = 0 \Rightarrow y(0,t) = 0 \quad ; \quad \text{OK (Vegg)}$
- $\mu_2 \rightarrow 0 \Rightarrow y_{r0} = -y_{i0}, y_{t0} = 2y_{i0} \Rightarrow \bar{\epsilon}_t = \frac{1}{2} \mu_2 \omega^2 y_{t0}^2 \rightarrow 0,$
 $\bar{\epsilon}_r = \bar{\epsilon}_i = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 y_{i0}^2 \quad ; \quad \text{hele bølgen reflekteres}$

Transmisjonskoeffisient:

T = P_t / P_i = andel av innkommende effekt som transmitteres

Refleksjonskoeffisient:

R = P_r / P_i = andel effekt som reflekteres

P = E * lambda / T = E * v = 1/2 * mu * omega^2 * y_0^2 * v (se s. 93, 94)

T = P_t / P_i = (mu_2 * y_to^2 * v_2) / (mu_1 * y_io^2 * v_1) = sqrt(mu_2 / mu_1) * (2*sqrt(mu_1) / (sqrt(mu_2) + sqrt(mu_1)))^2 = (4*sqrt(mu_1*mu_2) / (sqrt(mu_2) + sqrt(mu_1))^2)

R = P_r / P_i = (y_ro^2 / y_io^2) = ((sqrt(mu_2) - sqrt(mu_1)) / (sqrt(mu_2) + sqrt(mu_1)))^2

Energibevarelse => T + R = 1 (Sjekk selv)

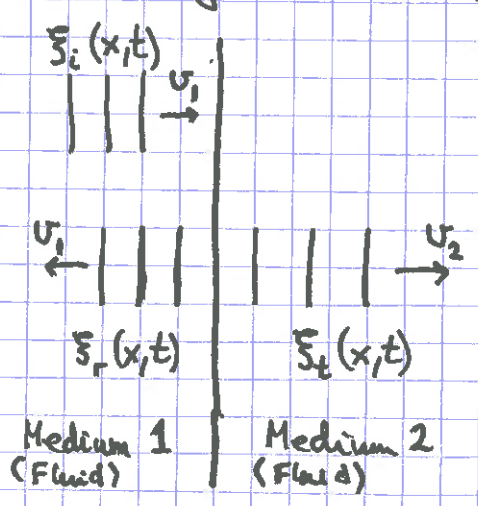
For plan harmonisk lydølge med normalt innfall mot grenseflate mellom to ulike medier (fluider!):

k = omega / v = omega * sqrt(rho / B) => xi_ro = (sqrt(rho_2 * B_2) - sqrt(rho_1 * B_1)) / (sqrt(rho_2 * B_2) + sqrt(rho_1 * B_1)) * xi_io ;

xi_to = (2 * sqrt(rho_1 * B_1)) / (sqrt(rho_2 * B_2) + sqrt(rho_1 * B_1)) * xi_io [Fordi B * partial xi / partial x er kontinuerlig i x=0; s. 88]

T = P_t / P_i = ... = (4 * sqrt(rho_1 * B_1 * rho_2 * B_2)) / (sqrt(rho_2 * B_2) + sqrt(rho_1 * B_1))^2

R = P_r / P_i = ... = ((sqrt(rho_2 * B_2) - sqrt(rho_1 * B_1)) / (sqrt(rho_2 * B_2) + sqrt(rho_1 * B_1)))^2



Eksempler

Eks 1: Hvor mange dB faller lydtrykknivået i en kulebølge ved en dobling av avstanden til kilden?

Løsn 1: $I(2r)/I(r) = (r/2r)^2 = 1/4$

$$\beta(2r) - \beta(r) = 10 \log \frac{I(2r)}{I_0} - 10 \log \frac{I(r)}{I_0} = 10 \log \frac{I(2r)}{I(r)}$$
$$= 10 \log \left(\frac{1}{4}\right) = -10 \log 4 \approx \underline{\underline{-6 \text{ dB}}}$$

[Hvis sylinderbølge: $\frac{I(2r)}{I(r)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta(2r) - \beta(r) = -10 \log 2 = -3 \text{ dB}$]

Eks 2: Hvor stor andel av energien reflekteres ved normalt innfall av en plan harmonisk lydølge mot en vannoverflate?

Løsn 2: Luft, $\sqrt{\rho_1 B_1} = \sqrt{1.29 \cdot 1.42 \cdot 10^5} = 428 \text{ (kg/m}^2\text{s)}$

Vann, $\sqrt{\rho_2 B_2} = \sqrt{10^3 \cdot 2.2 \cdot 10^9} = 1.483 \cdot 10^6 \text{ (-r-)}$

$\Rightarrow R = 0.9988 \approx \underline{\underline{99.9\%}}$

Eks 3: Som eks. 2, men med ^{typene stenger av} aluminium og stål; $R = ?$

Løsn 3: Stål, $\sqrt{\rho_2 B_2} = \sqrt{7800 \cdot 200 \cdot 10^9} = 3.95 \cdot 10^7$

Al, $\sqrt{\rho_1 B_1} = \sqrt{2700 \cdot 70 \cdot 10^9} = 1.37 \cdot 10^7$

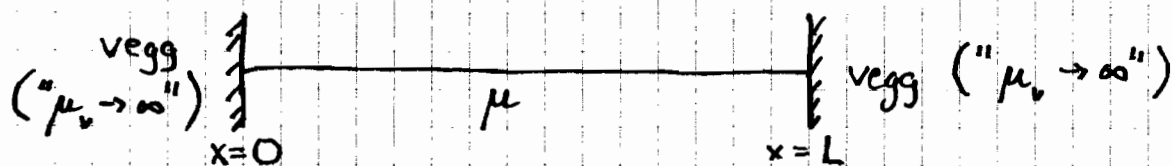
$\Rightarrow R = \left[\frac{(3.95 - 1.37)}{(3.95 + 1.37)} \right]^2 = \frac{0.235}{0.714} \approx 24\%$

[Dvs: $R \approx 1$ hvis svært "ulike" medier;
liten R hvis ganske "like" medier]

Stående bølger [YF 15.7, 15.8, 16.4; LL 10.3]

102

Ser på streng, lengde L , strekk-kraft S , masse μ pr lengdeenhet; fastspent i begge ender ($x=0$ og $x=L$):



Ren harmonisk bølge på strengen ($y_{ro} = y_{io} = y_0$; se s. 99):

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_0 \{ \sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) \} && (\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b) \\ &= y_0 \{ \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t \\ &\quad + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t \} \\ &= 2y_0 \sin kx \cdot \cos \omega t \end{aligned}$$

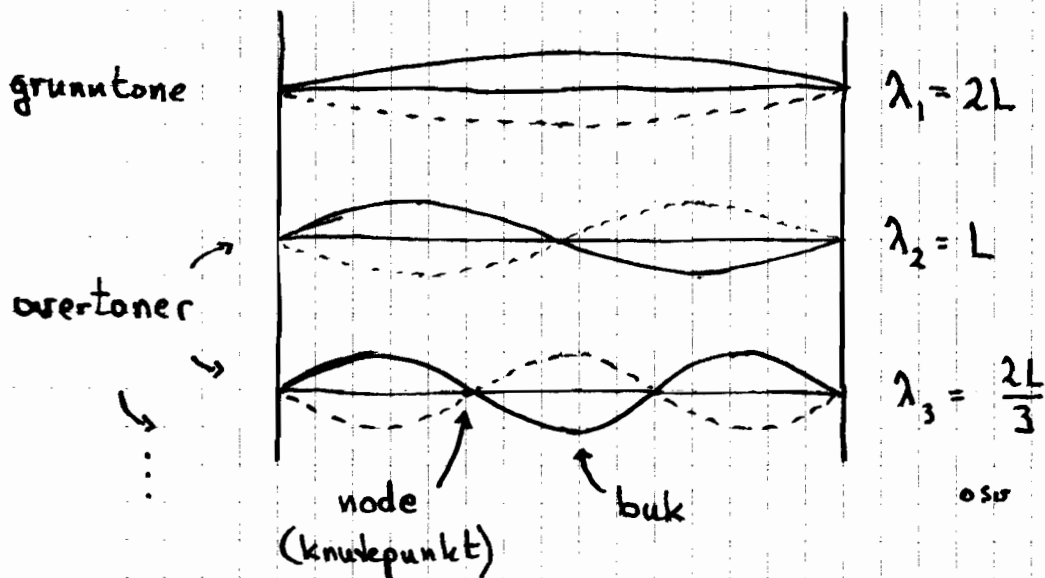
Dvs: Svingning med posisjonsavhengig amplitude $2y_0 \sin kx$, kalles en stående bølge.

Mulige bølglengder og frekvenser:

$$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n=1,2,3\dots)$$

$$\Rightarrow f_n = v/\lambda_n = \sqrt{S/\mu} \cdot n/2L$$

[Strenginstrumenter!]



Dopplereffekten [YF 16.8 ; LL 10.8]

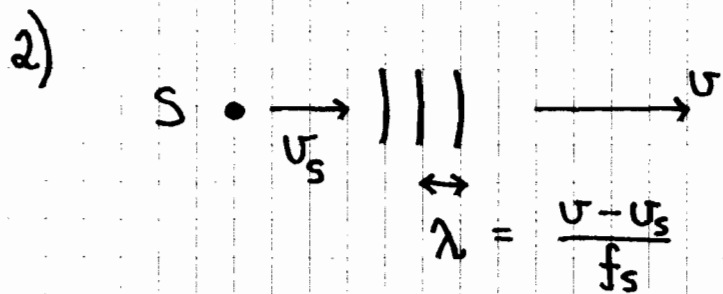
Lydkilde S og observatør O i relativ bevægelse
(Langs forbindelseslinjen S-O) \Rightarrow Observeret frekvens $f_o \neq$ udsendt frekvens f_s



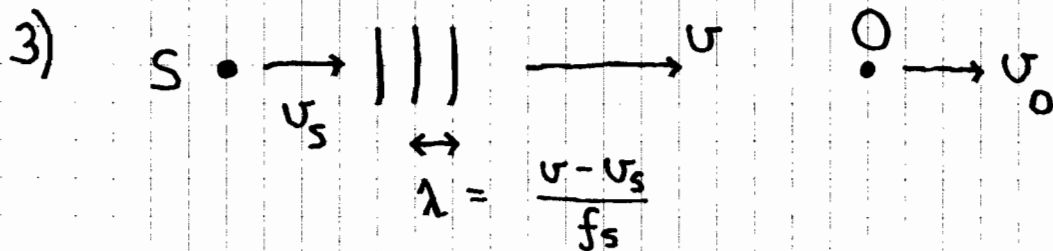
Bølgefart relativt O : $v - v_o$

\Rightarrow Frekvens målt av O : $f_o = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v} \cdot f_s$

Dvs : $f_o < f_s$ hvis $v_o > 0$, og omvendt



Frekvens målt av O : $f_o = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_s} \cdot f_s$



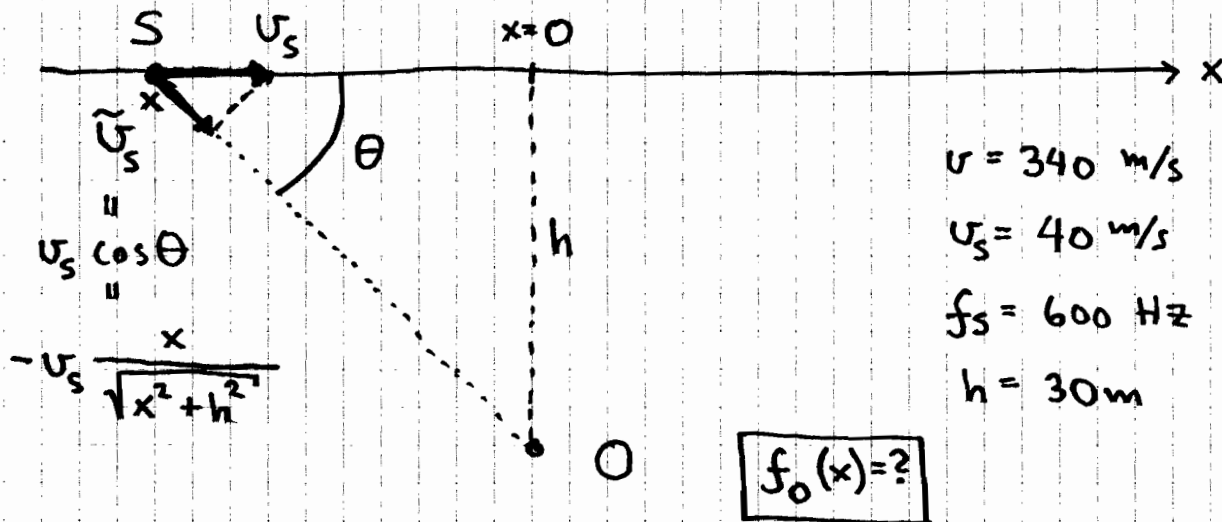
Frekv. målt av O : $f_o = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v - v_s} \cdot f_s$

4) Vind; $v_m =$ mediets (luftas) fart

Bølgefart relativt bakken: $v + v_m$

\Rightarrow Frekv. målt av O: $f_0 = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s} \cdot f_s$

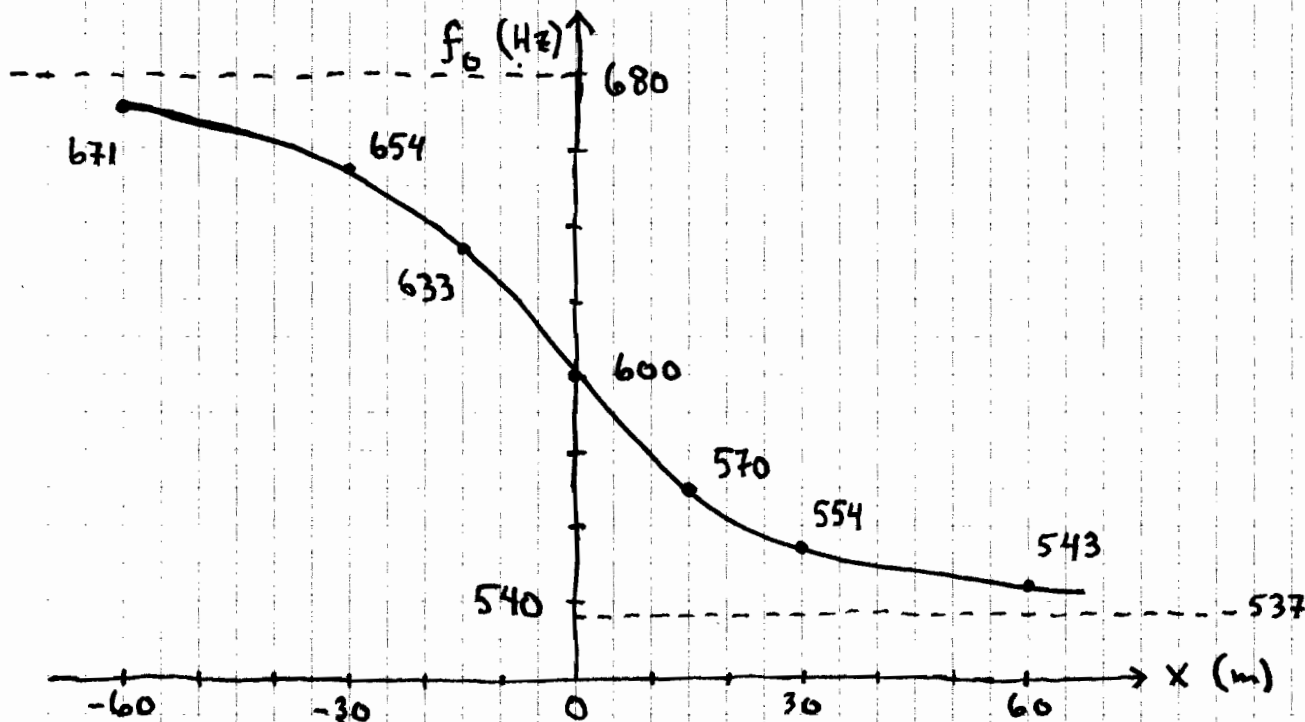
Eks:



Løsn:

$$f_0(x) = \frac{v f_s}{v - \tilde{v}_s(x)} = f_s \cdot \left\{ 1 + \frac{v_s}{v} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right\}^{-1}$$

$$= 600 \text{ Hz} \cdot \left\{ 1 + \frac{2x}{17\sqrt{x^2 + 900}} \right\}^{-1} \quad (\text{med } [x] = \text{m})$$



Interferens [YF 15.6, 16.6; LL 10.7]

106

"Flere bølger på samme sted til samme tid"

$S_1 \bullet \quad | \quad | \quad | \quad \xrightarrow{v} \quad y_1(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_1)$

$S_2 \bullet \quad | \quad | \quad | \quad \xrightarrow{v} \quad y_2(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_2)$

$\leftrightarrow \Delta\varphi$

$y(x,t) = ?$

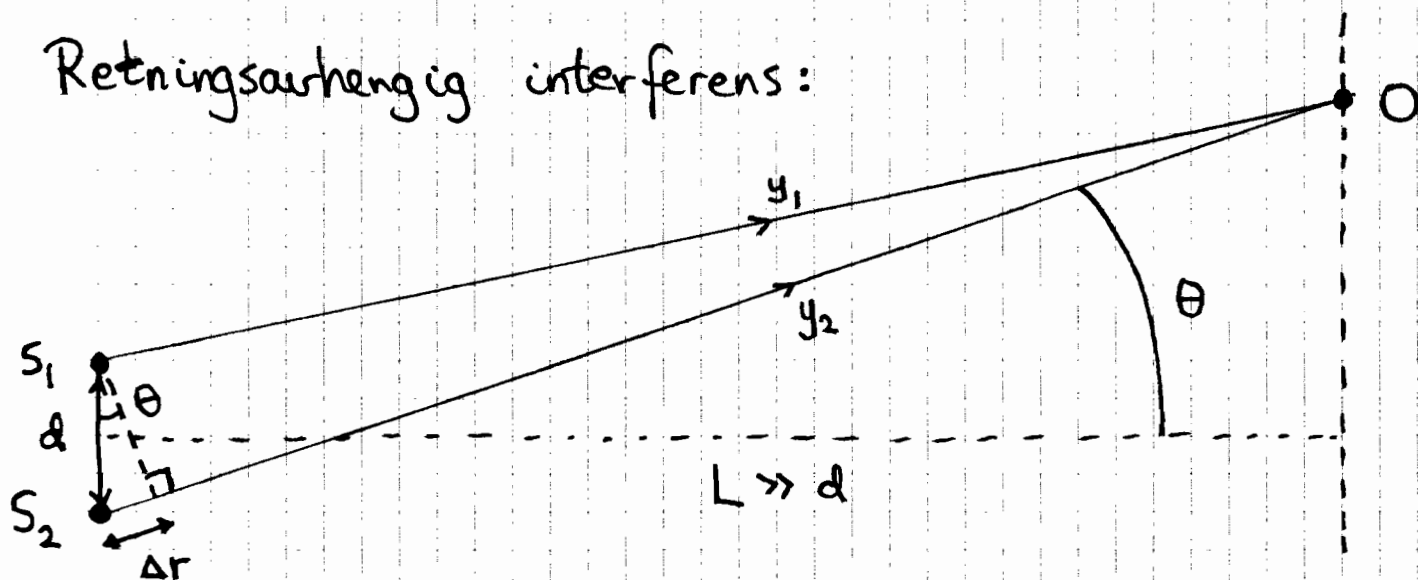
$[\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}]$

$\rightarrow y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2y_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})$

\Rightarrow Konstruktiv interferens, max amplitude $2y_0$, når $\varphi_1 = \varphi_2$, dvs y_1 og y_2 i fase ved 0.

Destruktiv interferens, min amplitude null, når $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, dvs y_1 og y_2 i motfase ved 0.

Retningsavhengig interferens:



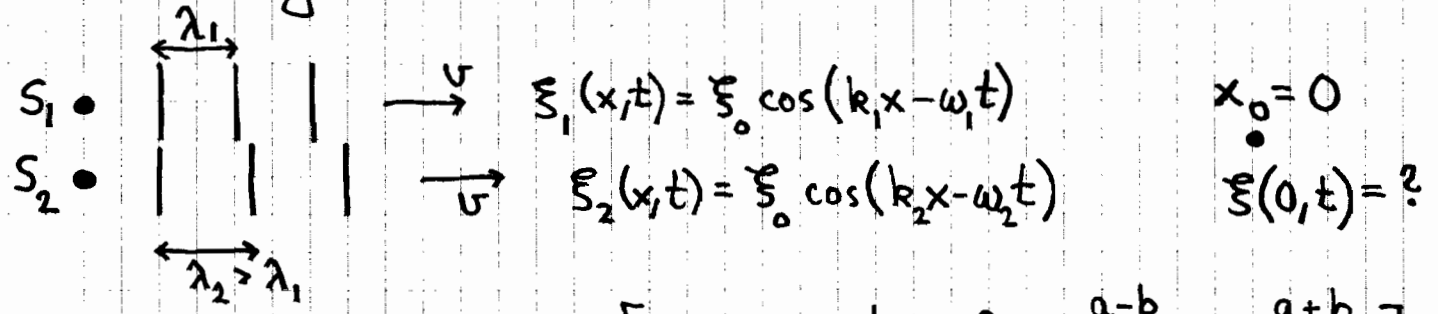
Anta at S_1 og S_2 er to bølgekilder som svinger i fase.

Veilengdeforskjell: $\Delta r \approx d \cdot \sin \theta$

\Rightarrow Max I ved O når $d \cdot \sin \theta = n \cdot \lambda$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

Min I ved O når $d \cdot \sin \theta = (n + \frac{1}{2}) \lambda$

Sveining [YF 16.7 ; LL 10.7]



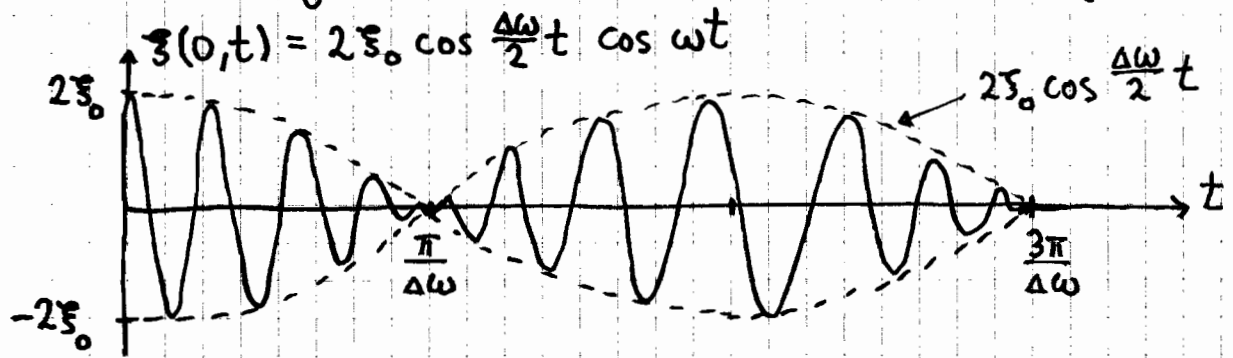
$$[\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}]$$

Total (lyd-)bølge:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)$$

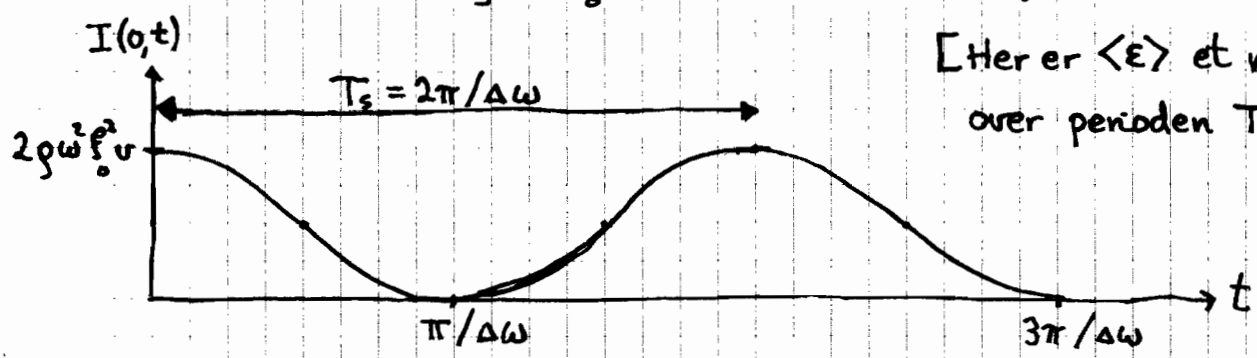
med $\Delta k = k_1 - k_2$, $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$, $k = (k_1 + k_2)/2$, $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$

Observert bølge ved $x_0 = 0$; antar $\Delta k \ll k$ og $\Delta \omega \ll \omega$:



$$\text{Intensitet: } I(0,t) = \langle \epsilon \rangle v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (2\xi_0)^2 v \cdot \cos^2\left(\frac{\Delta \omega}{2} t\right)^2$$

$$= \rho \omega^2 \xi_0^2 v \{1 + \cos(\Delta \omega t)\}$$



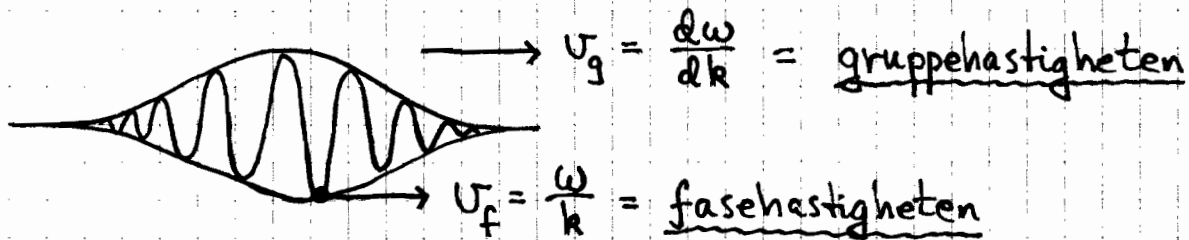
[Her er $\langle \epsilon \rangle$ et middel over perioden $T = 2\pi / \omega$.]

Konklusjon: Vi hører tonen (frekvensen) $f = \omega / 2\pi = (f_1 + f_2) / 2$, med modulert intensitet, såkalt sveining (beats), med svevefrekvens $f_s = 1/T_s = \Delta \omega / 2\pi = (\omega_1 - \omega_2) / 2\pi = f_1 - f_2$.

Anvendelse: Instrumentstemning.

Gruppestastighet Dispersjon

Totalbølgen s. 107, $\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)$,
 har hurtig varierende bærebølge $\cos(kx - \omega t)$ med hastighet
 $v = \omega/k = v_f =$ fasehastighet, og en langsomt varierende
modulasjonsbølge $\cos(\Delta k \cdot x/2 - \Delta\omega \cdot t/2)$ med hastighet
 $\Delta\omega/\Delta k$. Hvis $\Delta\omega$ og Δk er små, er $\Delta\omega/\Delta k \approx d\omega/dk$.



$v_g = d\omega/dk$ er fellestastigheten til hele bølgepakken
 $v_f = \omega/k$ er hastigheten til f.eks. en bestemt bølgedal (-topp)

Funksjonen $\omega(k)$ kalles dispersjonsrelasjonen. For både
 transv. bølger på streng ($v_f = \sqrt{S/\mu}$) og longitudinale
 bølger i et elastisk medium, lydbølger, ($v_f = \sqrt{B/\rho}$) har
 vi lineær dispersjonsrelasjon, dvs $\omega = v_f \cdot k$ med
konstant v_f . [Dvs: Samme v_f for alle frekvenser.]

Da er $v_g = d\omega(k)/dk = d[v_f \cdot k]/dk = v_f$, og hele
 bølgepakken har samme hastighet som en gitt bølgetopp.

Overflatebølger på dypt vann (dybde $\gg \lambda$), med ikke altfor
 liten bølgelengde ($\lambda \gg 1.7 \text{ cm}$), har bølgefart som bestemmes
 av tyngdens akselerasjon ("tyngdebølger") : $v_f(k) = \sqrt{g/k}$.

Da er $\omega(k) = v_f(k) \cdot k = \sqrt{g \cdot k}$, og $v_g(k) = \frac{1}{2} \sqrt{g/k} = v_f(k)/2$.

\Rightarrow Nye bølgetopper "skapes" bakerst i bølgepakken, "spaserer" gjennom
 bølgepakken, og "dør ut" fremst i bølgepakken!! Med $\lambda = 10 \text{ m}$
 er $k = 0.63 \text{ m}^{-1}$, og $v_f \approx 4 \text{ m/s}$ mens $v_g \approx 2 \text{ m/s}$.

Vannbølger i bølgerenna

Filmene (MP4) er spilt inn med 100 fps (frames per second). Mange mediaspillere (som Windows Media Player og VLC media player) antar at det er 25 fps og spiller dermed filmene i 1/4 hastighet. For vannbølgene vi skal se på her er en slik "slow motion" egentlig ganske passelig, i og med at bølgehastigheten er opp mot 1 m/s. Hvis du åpner filmene i programmet Tracker, spilles de av enda saktere, men der kan du ganske enkelt telle hundredels sekunder, bilde for bilde.

P1010178.MP4 viser en bølgepakke som genereres ved at den skråstilte platen i rennas venstre ende beveges opp og ned 5 ganger. Du kan se at det dannes en bølgepakke med 6 – 7 forholdsvis tydelige bølgetopper.

- Følg en av de første bølgetoppene med øynene og legg merke til at amplituden avtar, og hvordan bølgetoppen til slutt "dør ut" helt foran i bølgepakken.
- Legg også merke til hvordan nye bølgetopper dannes bakerst i bølgepakken og hvordan disse spaserer gjennom bølgepakken, først med økende og deretter med avtagende amplitude, før de, som nevnt, dør ut i forkant.

Dette skyldes den ikke-lineære dispersjonsrelasjonen for tyngdebølger på dypt vann, $\omega(k) = \sqrt{gk}$, der g er tyngdens akselerasjon og k er bølgetallet ($k = 2\pi/\lambda$). En gitt fase, f.eks en gitt bølgetopp, vil da bevege seg med fasehastigheten $v_f = \omega/k = \sqrt{g/k}$, mens bølgepakken ("bølgegruppen") vil bevege seg med gruppehastigheten $v_g = d\omega/dk = \sqrt{g/k}/2 = v_f/2$. Har vi dypt vann her? Vel, vanndybden er ca $D = 20$ cm, mens typiske bølgelengder er 30 – 40 cm eller mer. Det er klart at dybden ikke er "mye større enn" bølgelengden, men det kan vises at så lenge $kD = 2\pi D/\lambda$ er en del større enn 1, er dypvannsantagelsen ganske god. Her er kD ca 3 for de typiske bølgelengdene vi har med å gjøre.

I P1010182.MP4 beveges den skråstilte platen opp og ned kun 1 gang ved filmens begynnelse, slik at det genereres en bølgepuls i venstre ende av bølgerenna. På filmen befinner vi oss langt til høyre i bølgerenna, med stille vann i begynnelsen.

- Legg merke til at det er *lange* bølgelengder som først ankommer det filmede området. Du kan se tydelig bølgebevegelse etter ca 4 sekunder (dvs ca 16 sekunder av filmen, som går i kvart tempo). Avstanden fra plata, der bølgepakken genereres, til den grønne stange med skruer og mutre i venstre billedkant er 3.5 m, til den grå stanga bak bølgerenna og inntil bordet er det 4.3 m. Ser du *nøye* etter, vil du se bevegelse i overflaten ved den grønne stanga etter 14 filmsekunder, dvs etter 3.5 s "real time". Denne langbølgede delen av den genererte bølgepulsen har med andre ord forplantet seg med en gruppehastighet $v_g \simeq 1$ m/s. Siden $v_g = \sqrt{g/4k} = \sqrt{g\lambda/8\pi}$, tilsvarer dette en bølgelengde omkring $8\pi/g \simeq 2.6$ m. Ikke urimelig, siden det betyr at det er ca 1/3 bølgelengde fra den grønne til den grå stanga (0.8 m). Og ser du på bølgebevegelsen mellom 14 og ca 20 (film-)sekunder, får du kanskje inntrykk av at dette kan være omtrent riktig.
- Legg videre merke til at det ankommer *kortere og kortere* bølgelengder etter hvert som tiden går. Etter 40 filmsekunder, dvs 10 s real time, vil jeg anslå at bølgelengden er ca 1 m. Teorien sier at denne delen av bølgepakken har en gruppehastighet $\sqrt{9.8 \cdot 1/8\pi} \simeq 0.6$ m/s. Dette stemmer brukbart med en tilbakelagt avstand på ca 4 m i løpet av 10 s, dvs gruppehastighet ca 0.4 m/s. (Anslått verdi for λ er nok temmelig usikker.) Etter dette avtar bølgens amplitude, slik at det er enda vanskeligere å estimere typiske bølgelengder, men du får nok et inntrykk av at gruppehastigheten avtar med redusert bølgelengde.

P1010184.MP4 viser et kontinuerlig bølgetog, dvs plata i venstre ende av bølgerenna står på og genererer bølger kontinuerlig. (Bølgene dempes med et mykt skråplan helt i høyre ende av bølgerenna, slik at forholdsvis lite bølgeenergi reflekteres tilbake.)

- Du kan pause filmen ved f.eks 4 filmsekunder, dvs 1 s real time. Da ser du at bølgelengden er ca 0.4 m. (Siden det er plass til ca 2.5 hele bølgelengder på den hvite meterstaven.) Hvis du følger en bølgetopp og stopper filmen når den har beveget seg 1 m, vil du finne at dette tar ca 5 filmsekunder, dvs 5/4 s real time. Da er *fasehastigheten* målt til ca 0.8 m/s. Dette stemmer godt med teorien, som predikerer $v_f = \sqrt{g/k} = \sqrt{g\lambda/2\pi} = \sqrt{9.8 \cdot 0.4/2\pi} \simeq 0.8$ m/s.

Institutt for fysikk, NTNU 29.10.2014

Jon Andreas Støvneng

Gravitasjon [YF 13 ; LL 11]

03.11.14

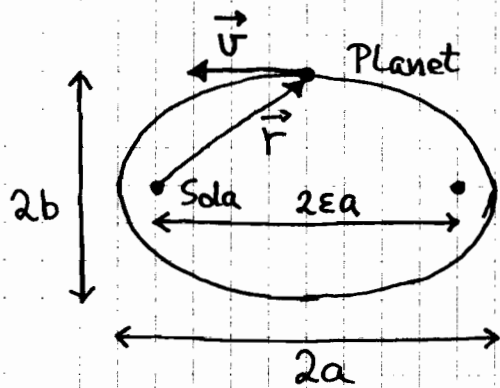
109

[Kort historikk fra Ptolemaeus til Einstein, se notat fra 2011]

Keplers lover (1571-1630) [YF 13.5 ; LL 11.5]

Analyserte Brahes observasjoner (1546-1601)

K1: Ellipseformede planetbaner med sola i et av brennpunktene



$$\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2} = \text{eksentrisitet}$$

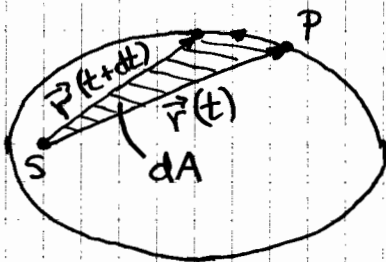
sirkel: $\epsilon = 0$

ellipse: $0 < \epsilon < 1$

parabel: $\epsilon = 1$

hyperbel: $\epsilon > 1$

K2: \vec{r} sveiper over et konstant areal pr tidsenhet



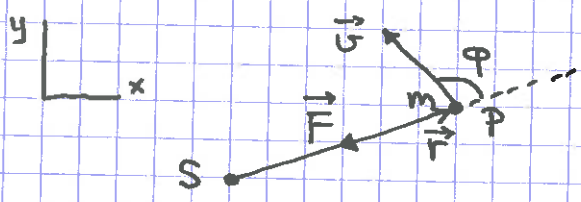
$$\frac{dA}{dt} = \text{konst.}$$

K3: $T^2/a^3 = \text{konst.}$ for alle planetene

T = omløpstid, a = store halvakse

[Bare tilnærmet riktig; $T^2/a^3 = 4\pi^2/G \cdot (M_s + m_p)$]

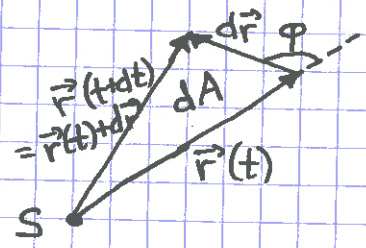
K2: [K1, K3: Klassisk mekanikk, 5. semester (evt. 7. sem)]



$$\vec{F} \sim -\hat{r} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{L} = L\hat{z} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{konst.}$$

$$L = r \cdot m v \cdot \sin \varphi$$



$dA =$ halvt parallellogram (R2)

$$= \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} r dr \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{dr}{dt} \sin \varphi = \frac{1}{2} r v \sin \varphi = \frac{L}{2m} = \text{konst.}$$

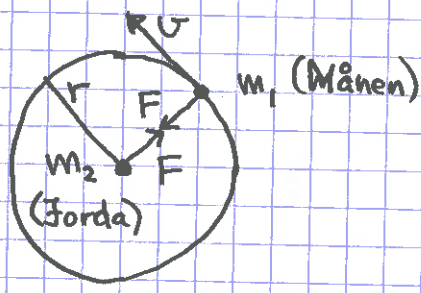
(1642-1727)

(Principia, 1687)

06.11.14

Newton's gravitasjonslov [YF 13.1; LL 2.5, 11.1]

Anta sirkelbane: $\epsilon = 0$, $a = b = r$ [Jorda: $\epsilon = 0.0167$; Månen: $\epsilon = 0.0549$]



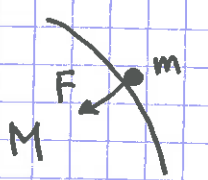
- K2 $\Rightarrow \vec{L} = \text{konst.} \Rightarrow \vec{F} \sim -\hat{r}$
- sirkel $\Rightarrow F = m_1 \omega^2 r = m_1 (2\pi/T)^2 r$
- K3 $\Rightarrow T^2 = C \cdot a^3 = C \cdot r^3 \Rightarrow F \sim m_1 / r^2$
- N3 $\Rightarrow F_{12} = F_{21} \Rightarrow F \sim m_2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -G (m_1 m_2 / r^2) \hat{r}}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

(Cavendish 1798; Du 2014(?))

På jordas overflate:



$$F = mg \text{ med } g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

Potensiell energi [YF 13.3; LL 11.1]

(111)

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad ; \quad U(\vec{r}_0) = 0$$

Velger $U(\infty) = 0$

$$\Rightarrow U(r) = - \int_{\infty}^r (-GmM/r^2) dr = GmM \int_{\infty}^r (-\frac{1}{r}) = \underline{\underline{-\frac{GmM}{r}}}$$

= pot.energi for to masser m, M i innbyrdes avstand r

Eks: Masse m i jordas tyngdefelt, $U(z) - U(0) = ?$
 $z =$ høyde over bakken

$$\begin{aligned} \text{Løsn: } U(z) - U(0) &= -\frac{GmM}{R+z} + \frac{GmM}{R} = GmM \frac{-R+R+z}{R(R+z)} \\ &= GmM \frac{z}{R(R+z)} \stackrel{R \gg z}{\approx} m \cdot \frac{GM}{R^2} \cdot z = \underline{\underline{mgz}} \end{aligned}$$

Satellitter [YF 13.4]

Anta sirkulær bane (Oftetilfelle i praksis)

$$F = ma \quad ; \quad F = GMm/r^2, \quad a = v^2/r$$

$$\Rightarrow GMm/r^2 = mv^2/r \quad \Rightarrow \underline{\underline{v = \sqrt{GM/r}}}$$

Geostasjonær bane: $T = 24 \text{ h}$; over fast sted på ekvator
 $\Rightarrow r = 42246 \text{ km}$ [Øv. 11]

$$\begin{aligned} \text{Total energi: } E = K + U &= \frac{1}{2}mv^2 - GMm/r = \frac{1}{2}m \cdot GM/r - GMm/r \\ &= \underline{\underline{-GMm/2r}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K = -\frac{1}{2}U = -E > 0$$

Potensial og felt

[LL 11.1]

(112)

Feltstyrke $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Kraft pr masseenhet}$

$$\vec{g} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{m} = - \frac{MG}{r^2} \hat{r}$$

= gravitasjonsfeltet som M omgir seg med

Potensial $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Pot. energi pr masseenhet}$

$$V(r) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{U(r)}{m} = - \frac{MG}{r}$$

= gravitasjonspotensialet som M omgir seg med

Fra før:

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad \vec{F} = -\hat{r} \frac{dU}{dr}$$

Divisjon med m gir:

$$V(r) = - \int_{r_0}^r \vec{g} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad dV = -\vec{g} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad \vec{g} = -\hat{r} \frac{dV}{dr}$$

Tilsvarende for andre konservative krefter (s. 22),

f.eks. elektrostatisk kraft mellom ladninger q og Q (s. 10):

$$\vec{F} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \vec{F}/q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \text{elektrisk felt som } Q \text{ omgir seg med}$$

$$U(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{pot. energi for } q \text{ og } Q \text{ i innbyrdes avstand } r$$

$$V(r) = U(r)/q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{Coulombpotensialet som } Q \text{ omgir seg med}$$

$$V(r) = - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad \vec{E} = -\hat{r} \frac{dV}{dr}$$

$$[MA1103/TMA4105: \vec{E} = -\nabla V; \quad \nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}]$$

V og g̃ fra massefordeling

[YF 13.6; LL 11.2]

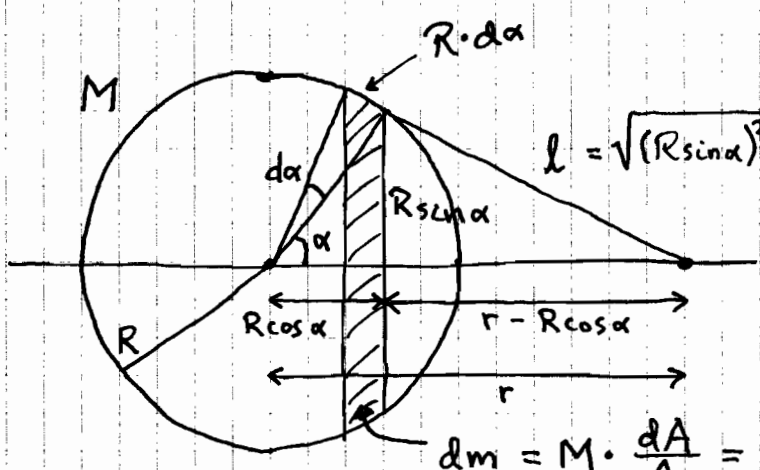
10.11.14



Potensial i P:

$$V_P = \sum_i V_P^i = -G \sum_i \frac{\Delta M_i}{r_i} \xrightarrow{\Delta M_i \rightarrow 0} -G \int \frac{dm}{r}$$

Eks 1: Kuleskall



$$l = \sqrt{(R \sin \alpha)^2 + (r - R \cos \alpha)^2} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha}$$

$$dm = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{(2\pi R \sin \alpha)(R d\alpha)}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} M \sin \alpha d\alpha$$

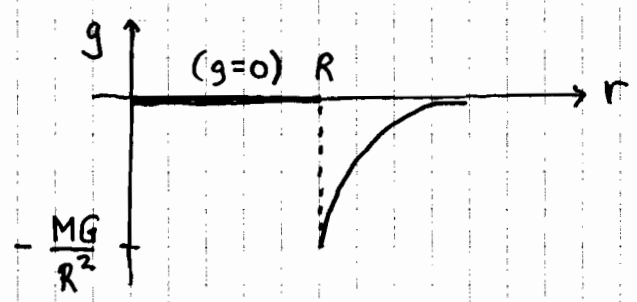
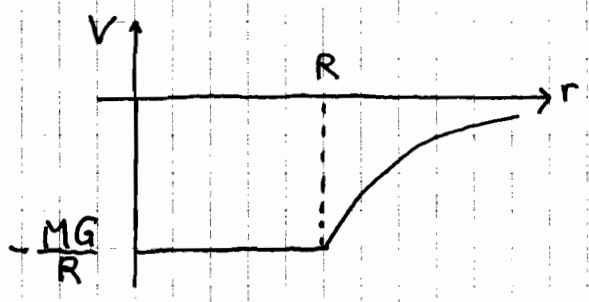
$$\Rightarrow V(r) = -G \int \frac{dm}{l} = -\frac{1}{2} MG \int_0^\pi \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha}}$$

$$= -\frac{1}{2} MG \int_0^\pi \frac{1}{rR} \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha}$$

$$= -\frac{MG}{2rR} \left\{ \underbrace{\sqrt{R^2 + r^2 + 2rR}}_{= R+r} - \underbrace{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR}}_{= r-R} \right\} = -\frac{MG}{r}$$

Hvis $r < R$: Alt likt, unntatt $\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR} = R - r \Rightarrow V(r) = -\frac{MG}{R}$

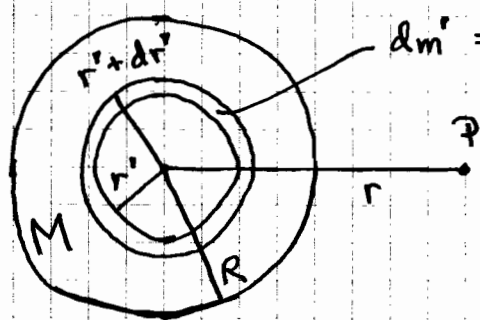
Feltet blir: $\vec{g}(r) = -\hat{r} dV/dr = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ -\hat{r} MG/r^2 & (r > R) \end{cases}$



Eks 2: Kompakt kule

114

V fra kompakt kule = $\int dV$ fra tynne kuleskall



$$dm' = M \cdot dV'/V = M \cdot 4\pi r'^2 dr' / \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{3M}{R^3} r'^2 dr'$$

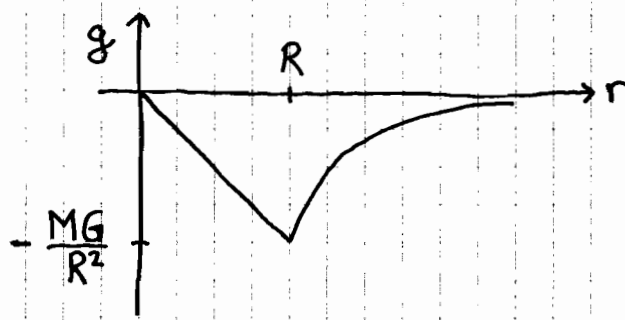
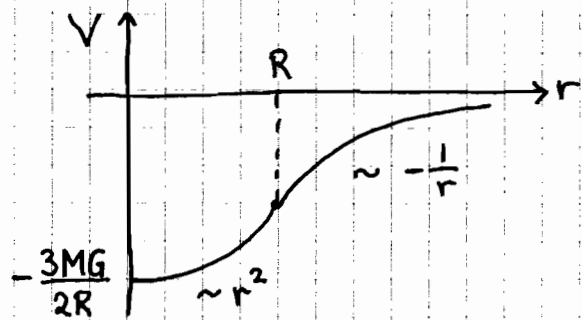
$$\Rightarrow dV = -G \frac{dm'}{r} = -\frac{3MG}{r R^3} r'^2 dr'$$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{3MG}{r R^3} \int_0^R r'^2 dr' = -\frac{MG}{r}$$

Hvis $r < R$: Må bruke $dV = -G dm'/r$ fra kuleskall med $r' < r$
 og $dV = -G dm'/r'$ fra kuleskall med $r' > r$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{3MG}{R^3} \left\{ \underbrace{\int_0^r \frac{r'^2 dr'}{r}}_{= r^2/3} + \underbrace{\int_r^R \frac{r'^2 dr'}{r'}}_{= \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2} \right\} = -\frac{3MG}{2R} \left\{ 1 - \frac{r^2}{3R^2} \right\}$$

Feltet: $\vec{g}(r) = -\hat{r} dV/dr = \begin{cases} -\hat{r} MG r / R^3 & (r < R) \\ -\hat{r} MG / r^2 & (r > R) \end{cases}$



Kraft på masse m ved $r = R$:

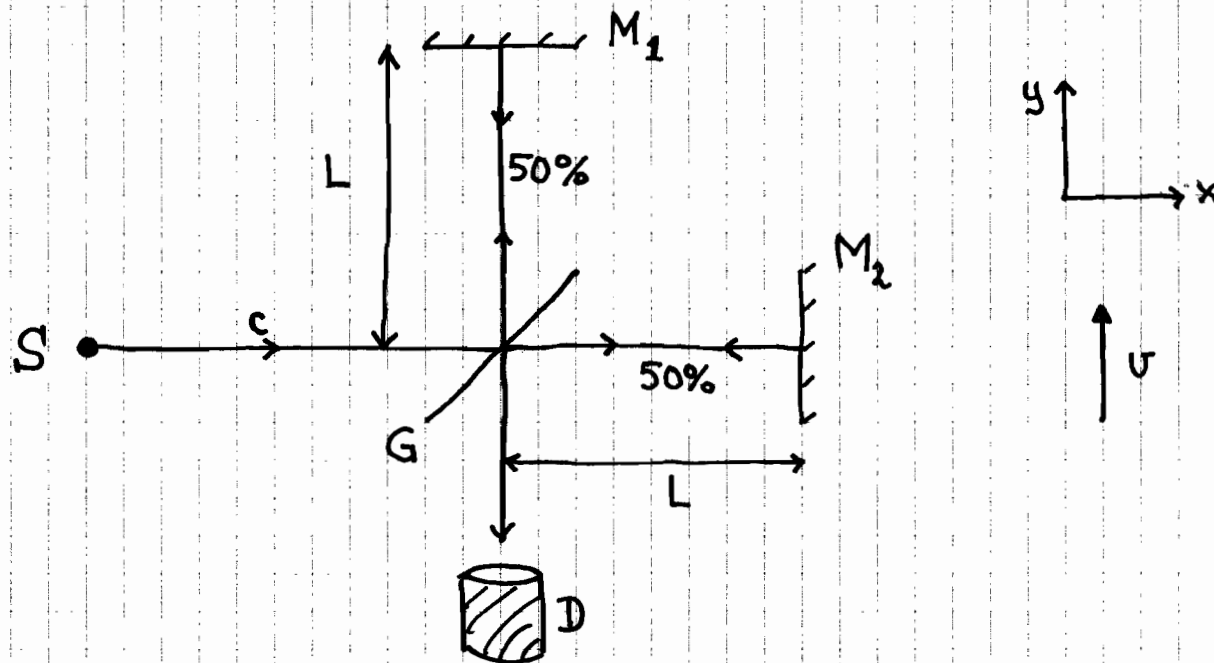
$$\vec{F}(R) = m \cdot \vec{g}(R) = -\hat{r} \frac{MG}{R^2} \cdot m$$

Dvs: Som om hele massen M var samlet i sentrum!

\Rightarrow OK å bruke $\vec{F} = m\vec{g}$ med $g = MG/R = 9.81 \text{ m/s}^2$
 for legeme på jordoverflaten, slik vi alltid har gjort.

Michelson - Morley - eksperimentet [YF 35.5 ; LL s.356]

"On the relative motion of the earth and the luminiferous ether",
The American Journal of Science, 34, 333 - 345 (1887).



- M_1, M_2 : speil
- S : lyskilde
- G : stråledeler ($T = R = 1/2$)
- D : detektor
- v : jordas hastighet relativt eteren, et tenkt medium som lysbølgene forplanter seg i
- c : lysets hastighet, ca $3 \cdot 10^8$ m/s (kjent siden 1729, James Bradley)

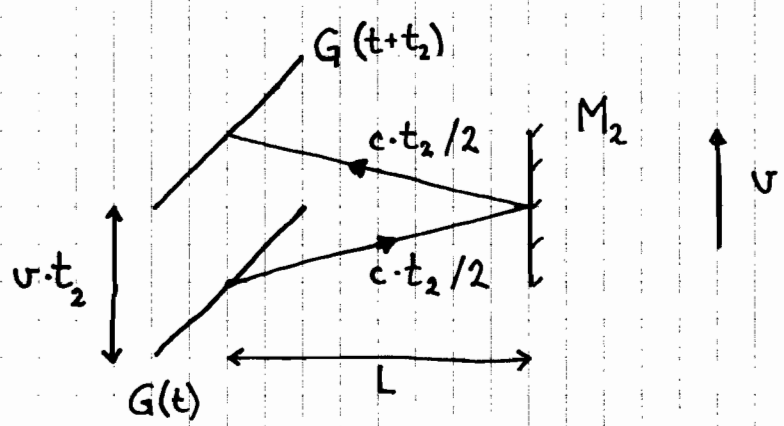
Interferens mellom bølgene som har gått hhv SGM₁GD og SGM₂GD.

Tid brukt av lysbølge på $G M_1 G$:

$$t_1 = t(GM_1) + t(M_1G) = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{L(c+v+c-v)}{(c-v)(c+v)} =$$

$$= \frac{2Lc}{c^2-v^2} = \frac{2L}{c(1-v^2/c^2)} \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \left[\frac{1}{1-x} \stackrel{|x| \ll 1}{\approx} 1+x\right]$$

Tid brukt av lysbølge på $G M_2 G$:



$$(v \cdot t_2)^2 + (2L)^2 = (c \cdot t_2)^2$$

$$\Rightarrow t_2^2 (c^2 - v^2) = (2L)^2$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{2L}{(c^2 - v^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{2L}{c} (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\left[(1-x)^{-1/2} \stackrel{|x| \ll 1}{\approx} 1 + \frac{1}{2}x\right]$$

Tidsforskjell: $\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L v^2}{c^3}$

Vei forskjell: $\Delta r = c \cdot \Delta t = L \cdot v^2/c^2$

Faseforskjell: $k \cdot \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot L \cdot \frac{v^2}{c^2}$

Ved å rotere apparaturen 90° bytter M_1 og M_2 rolle, og Δt , Δr og $k \Delta r$ skifter fortegn.

Dette gir en fasedifferanse mellom de to eksperimentene:

$$\Delta \phi = \frac{4\pi L v^2}{\lambda c^2}$$

M & M 1887: $L = 11 \text{ m}$, $\lambda = 550 \text{ nm}$, $v \approx 3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ (for jordas hastighet i bane rundt sola; dvs vi antar en eter i ro relativt sola)

Basert på denne teorien forventet M&M en endring i interferensmønsteret ved detektoren D, ved å rotere interferometeret 90° :

$$\Delta\phi = \frac{4\pi \cdot 11 \cdot (3 \cdot 10^4)^2}{5.5 \cdot 10^{-7} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 0.4 \cdot 2\pi$$

Eksperimentene gav $\Delta\phi < 0.01 \cdot 2\pi$.

M&M konkluderte med at eteren, mediet som lyset forplantet seg i, måtte være i ro relativt jorda.

Eteren ble dratt med jorda. ("Ether drag".)

Eter-hypotesen ble etterhvert forkastet. Einstein skar gjennom : Det er ingen eter! Og ingen inertialsystemer er bedre enn andre!

Einsteins to postulater:

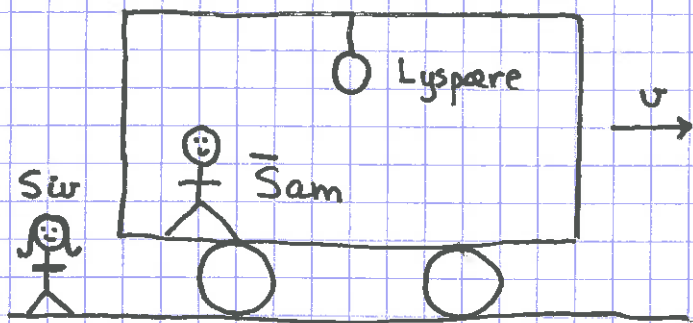
1. Relativitetsprinsippet: Alle fysikkens lover er de samme i alle inertialsystemer.
2. Lysets hastighet i vakuum er den samme for alle observatører, og uavhengig av lyskildens bevegelse.

[Inertialsystem: Ref.system der N1 gjelder: $\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konstant}$]

Vi skal se på konsekvenser av Einsteins postulater.

Samtidigheit

[YF 37.2; LL 12.5]



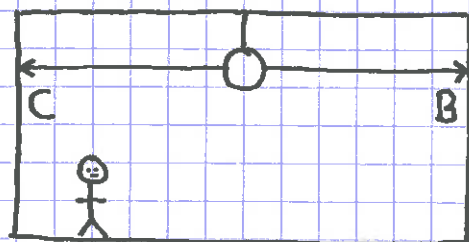
Hendelser:

A: Lyset slås på

B: Lyset når frontveggen

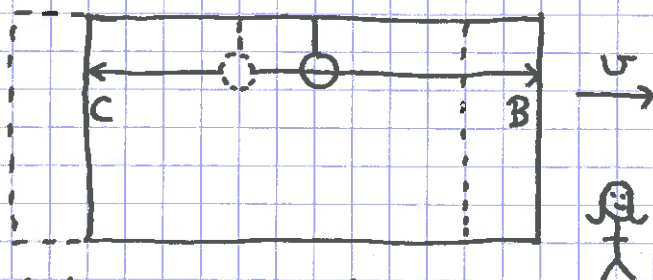
C: Lyset når bakveggen

Sam:



⇒ B og C samtidig

Siv



Kortere vei for lyset til bakvegg enn frontvegg ⇒ C før B

Dvs:

To hendelser som er samtidige i ett inertialsystem er generelt ikke samtidige i et annet.

Merk at Sam og Siv er flinke, og korrigerer for f.eks. ulik tid brukt av lyset fra C til Sams og Sivs øyne.

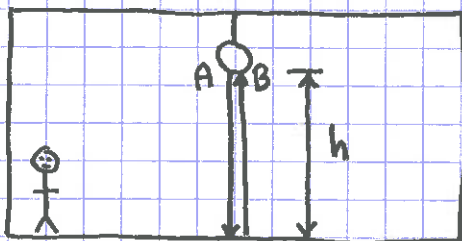
Tidsdilatasjon [YF 37.3 ; LL 12.4]

Hendelser:

A: Lyset slås på

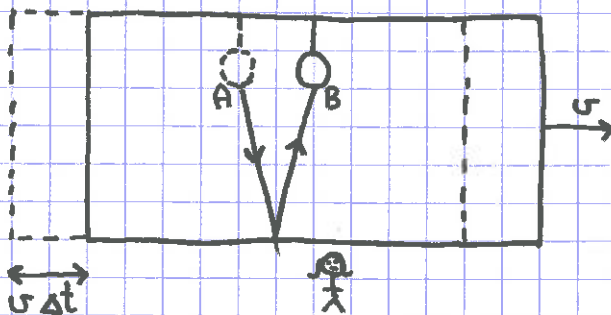
B: Lyset er tilbake ved lampa etter refleksjon i gulvet

\bar{S} am:



$$\Delta \bar{t} = \frac{2h}{c}$$

Siv:

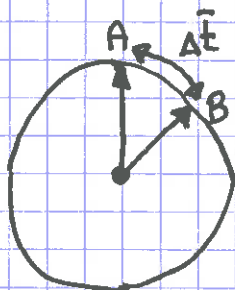


$$(c \cdot \frac{\Delta t}{2})^2 = h^2 + (v \cdot \frac{\Delta t}{2})^2$$

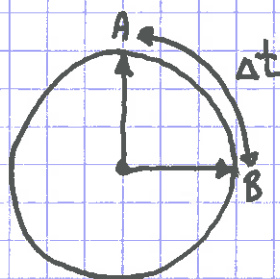
$$(\Delta t)^2 = \frac{4h^2}{c^2 - v^2}$$

$$\Delta t = \frac{2h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta \bar{t}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \Delta \bar{t}$$

Dvs: Kortest tid, $\Delta \bar{t}$, måles i systemet \bar{S} der hendelsene skjer på samme sted. Klokker i bevegelse går saktere enn klokker i ro.



\bar{S} ams klokke
(i bevegelse)

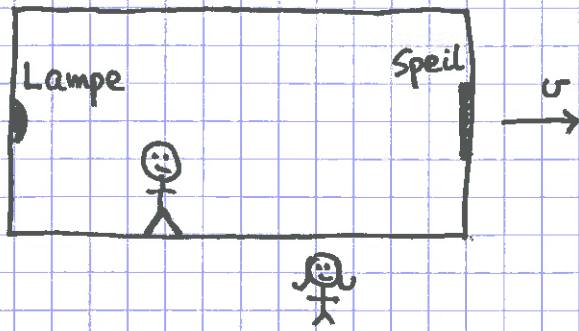


Sivs klokke
(i ro)

Lengdekontraksjon

[YF 37.4; LL 12.4]

(120)



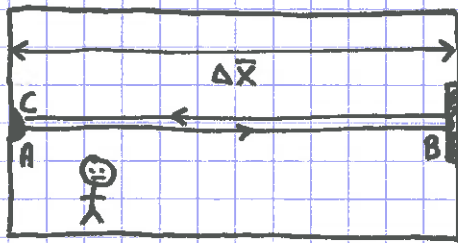
Hendelser:

A: Lyset slås på

B: Lyset reflekteres i speilet

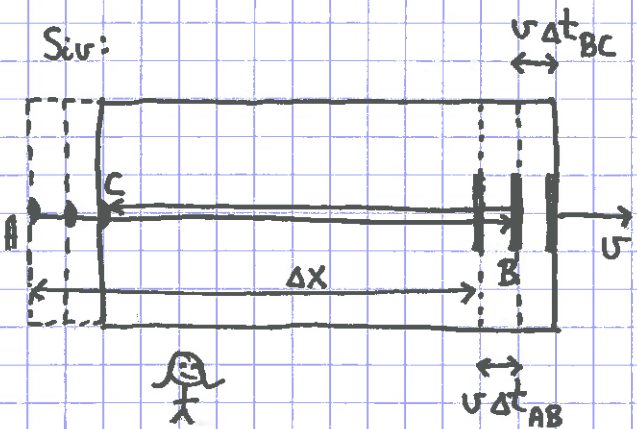
C: Lyset treffer bakveggen

Sam:



$$\Delta \bar{t}_{AC} = \frac{2\Delta \bar{x}}{c} \Rightarrow \Delta \bar{x} = \frac{1}{2} c \Delta \bar{t}_{AC}$$

Siv:



$$\Delta t_{AB} = \frac{\Delta x}{c} + \frac{v \Delta t_{AB}}{c}$$

$$\Delta t_{BC} = \frac{\Delta x}{c} - \frac{v \Delta t_{BC}}{c}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{AB} = \frac{\Delta x}{c-v}, \quad \Delta t_{BC} = \frac{\Delta x}{c+v}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{AC} = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} = \frac{\Delta x (c+v) + \Delta x (c-v)}{(c-v)(c+v)} = \frac{2c \Delta x}{c^2 - v^2} = \frac{2\Delta x}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} c \Delta t_{AC} (1 - v^2/c^2)$$

Pga tidsdilatasjon er: $\Delta \bar{t}_{AC} = \Delta t_{AC} \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\Rightarrow \Delta \bar{x} = \frac{1}{2} c \Delta t_{AC} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \Delta x$$

Dvs: Objektet er lengst i systemet der det er i ro.
Objekter i bevegelse krymper (i bevegelsesretningen).

(Siv måler krympet vogn, $\Delta x = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta \bar{x} < \Delta \bar{x}$.)

Hva med lengder målt normalt på \vec{v} ?

Hendelser:

A: Siv tegner blå strek $\Delta y = 1m$ over bakken på en husvegg.

B: Sam —||— rød —||— $\Delta \bar{y} = 1m$ —||— samme husvegg.

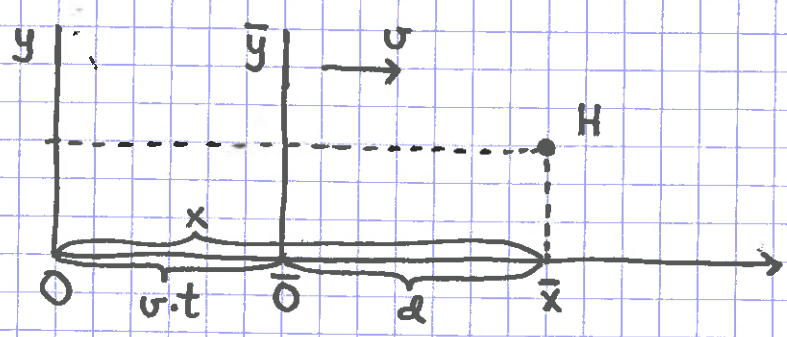
Hvis det er lengdekontraksjon $\perp \vec{v}$, vil Siv hevde at rød strek er nederst, mens Sam vil hevde at blå strek er nederst.

S og \bar{S} er like gode inertialsystemer \Rightarrow Begge må ta feil!

$\Rightarrow \Delta y = \Delta \bar{y}$, og ingen lengdekontraksjon $\perp \vec{v}$.

Lorentztransformasjonene (LT) [YF 37.5; LL 12.2]

LT gir sammenhengen mellom en gitt hendelse H i S, dvs (x, y, z, t) , og samme hendelse i \bar{S} , dvs $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$; \bar{S} har hastighet $v \hat{x}$ relativt S; felles origo, $O = \bar{O}$, ved synkronisert tid $t = \bar{t} = 0$.



Galileo: $\bar{x} = x - vt$
 $\bar{t} = t$

Einstein: $d = \bar{O}\bar{x}$ målt i S $= x - vt$
 $\bar{x} = \bar{O}\bar{x}$ målt i $\bar{S} = d / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ pga lengdekontraksjon

Innfører lorentzfaktoren: $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$

Dermed: $\bar{x} = \gamma(x - vt)$. Og siden S har hastighet $-v \hat{x}$ relativt \bar{S} , må vi omvendt ha: $x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$, der $\bar{d} = \bar{x} + v\bar{t} = O\bar{x}$ målt i \bar{S} og $x = O\bar{x}$ målt i S.

Finner så $\bar{t}(x, t)$:

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) = \gamma(\gamma(x - vt) + v\bar{t})$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\gamma} - \gamma x + \gamma vt = v\bar{t}$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \gamma t - \frac{1}{v} \gamma x \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \gamma t - \gamma x v/c^2$$

$$= 1 - 1 + v^2/c^2 = v^2/c^2$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x\right); \text{ og tilsvarende: } t = \gamma \left(\bar{t} + \frac{v}{c^2} \bar{x}\right)$$

Ingen lengdekontraksjon $\perp \vec{v} \Rightarrow \bar{y} = y$ og $\bar{z} = z$

Dermed:

Hendelse i \bar{S} uttrykt ved hendelse i S :

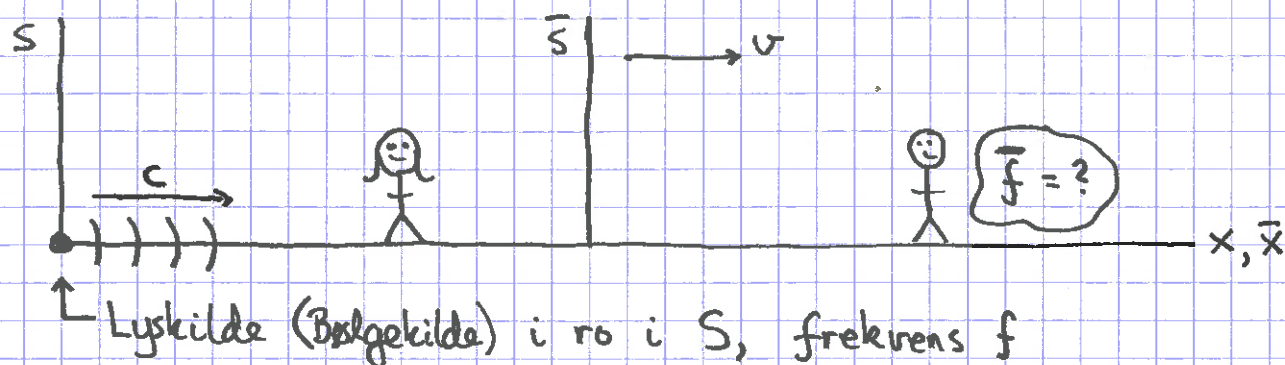
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \gamma(x - vt) \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z \\ \bar{t} &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \end{aligned}$$

Hendelse i S uttrykt ved hendelse i \bar{S} :

$$\begin{aligned} x &= \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) \\ y &= \bar{y} \\ z &= \bar{z} \\ t &= \gamma \left(\bar{t} + \frac{v}{c^2} \bar{x}\right) \end{aligned}$$

Her er $\vec{v}_{S\bar{S}} = -\vec{v}_{\bar{S}S} = v\hat{x}$ og $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger [YF 37.6; LL 12.6]



Siv måler tid for utsendelse av bølgepulser (bølgetopper) og tid for ankomst av bølgepulserne hos Sam; dessuten Sams posisjon ved disse tidspunktene:

- 1. puls sendes ut ved $t=0$, Sam i x_0
- " — ankommer Sam ved $t=t_1$, — " — $x_1 = x_0 + vt_1 = ct_1$
- 2. puls sendes ut ved $t=T$, — " — $x_0 + vT$
- " — ankommer Sam ved $t=t_2$, — " — $x_2 = x_0 + vt_2 = c(t_2 - T)$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) = c(t_2 - t_1) - cT$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{c}{c-v} \cdot T \quad \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{cv}{c-v} \cdot T$$

Periode målt av Sam:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right) - \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right) = \gamma (t_2 - t_1) - \frac{\gamma v}{c^2} (x_2 - x_1) \\ &= \gamma \frac{c}{c-v} T - \gamma \frac{v}{c^2} \cdot \frac{cv}{c-v} \cdot T = \gamma \frac{c}{c-v} \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}_{= 1/\gamma^2} T \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{c}{c-v} \cdot T \\ &= \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{(c-v)^2}} \cdot T = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot T \end{aligned}$$

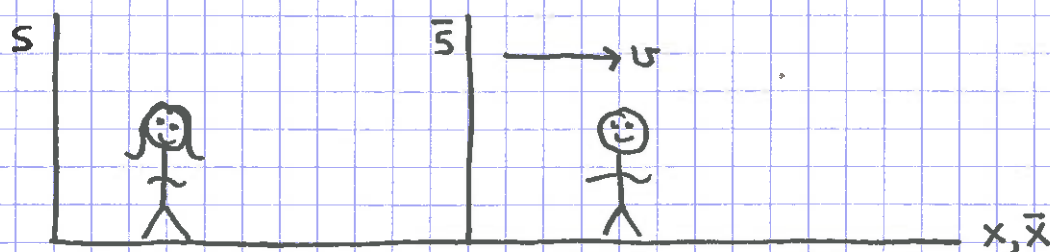
Frekvens målt av Sam: $\bar{f} = \bar{T}^{-1} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} f$

Hvis $v \ll c$: $\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \approx \left(1 - \frac{v}{2c} \right) \left(1 + \frac{v}{2c} \right) \approx 1 - \frac{v}{2c} - \frac{v}{2c} \dots = 1 - \frac{v}{c}$

$\Rightarrow \bar{f} = f \cdot \left(1 - \frac{v}{c} \right)$; som lyd med kilde i ro og observatør i bevegelse

Relativistisk mekanikk [YF 37.7, 37.8; LL 12.7, 12.8]

125



Sam kan definere:

Ordinær hastighet: $v = dx/dt$ (dx og dt målt av S-ur)

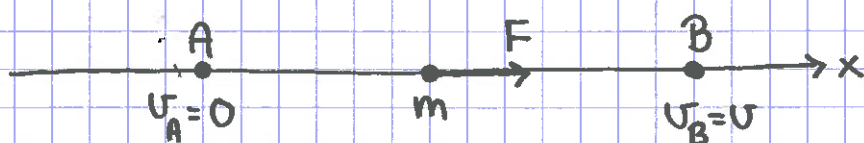
Egenhastighet: $\eta = dx/d\bar{t}$ ($d\bar{t}$ målt av S-ur) ($d\bar{x}=0$)

Pga tidsdilatasjon, $d\bar{t} = dt \sqrt{1-v^2/c^2}$, er $\vec{\eta} = \gamma \vec{v} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Prinsippet om impulsbevarelse er intakt hvis relativistisk impuls defineres ved egenhastigheten:

$$\vec{p} = m\vec{\eta} = \gamma m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Kinetisk energi:



$$K = W = \int_A^B F dx \stackrel{N2}{=} \int_A^B \frac{dp}{dt} dx = \int_0^v \frac{dp}{dv} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dv$$

$$\frac{dp}{dv} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mv \cdot \frac{1}{2} \cdot 2v/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m(1-v^2/c^2) + mv^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow K = \int_0^v \frac{mv dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \left[\frac{mc^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \right]_0^v = \underline{\underline{\gamma mc^2 - mc^2}}$$

Prinsippet om energibevarelse er intakt hvis størrelsen γmc^2 oppfattes som total energi.

Dermed:

$$\text{Hvileenergi: } E_0 = mc^2$$

$$\text{Kinetisk energi: } K = (\gamma - 1)mc^2$$

$$\text{Total energi: } E = E_0 + K = \gamma mc^2$$

I den ikke-relativistiske grensen, $v \ll c$:

$$\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \Rightarrow K \approx \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)mc^2 - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{OK!}$$

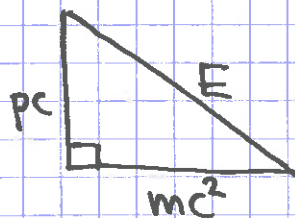
Nyttig sammenheng mellom E , p og m :

$$p = \gamma mv = \gamma mc^2 \cdot \frac{v}{c^2} = E \cdot \frac{v}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2 c^2}{E^2}$$

$$\Rightarrow E^2 = (\gamma mc^2)^2 = (mc^2)^2 \left(1 - \frac{p^2 c^2}{E^2}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = (mc^2)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2}$$



Eks: Foton. $m=0$, $E=pc$.

Partikkel i ro: $p=0$, $E=mc^2$

Elastiske prosesser: E , \vec{p} og K bevart (\Rightarrow også m bevart)

Uelastiske — : E , \vec{p} bevart; K , m ikke bevart

[Med størrelsene E , \vec{p} , K , m for hele systemet.]

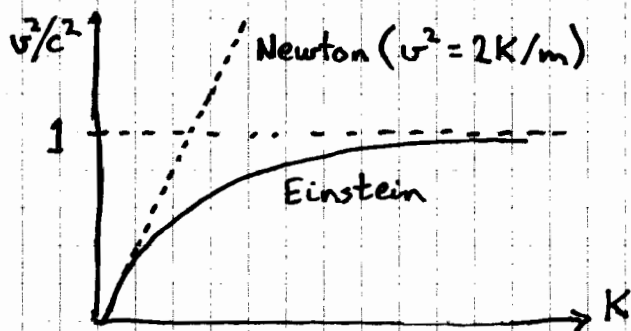
EKSEMPLER

127

Eks 1: Bestem $v^2(K)$ for partikler med masse m .

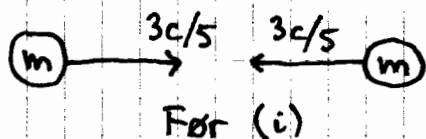
Løsn 1: $E = K + mc^2 = \gamma mc^2 \Rightarrow \gamma = (K + mc^2)/mc^2$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v^2 = c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \underline{\underline{c^2 \left(1 - \left(\frac{mc^2}{K + mc^2}\right)^2\right)}}$$



Exp: W. Bertozzi, American Journal of Physics 32, 551 (1964): Elektroner akselerert opp til $K = 15 \text{ MeV} \approx 30 \cdot mc^2$

Eks 2:



○ $M = ?$
Etter ($v = 0$)
(f)

Løsn 2: $E_i = 2 \cdot \gamma_i \cdot mc^2$; $\gamma_i = (1 - 9/25)^{-1/2} = (16/25)^{-1/2} = 5/4$

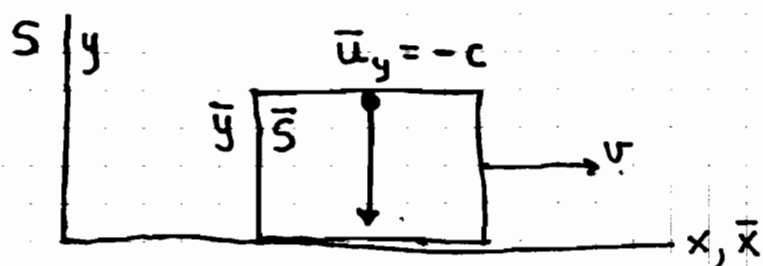
$$\Rightarrow E_i = \frac{5}{2} mc^2$$

$$E_f = \gamma_f \cdot Mc^2 = Mc^2$$

$$E_f = E_i \Rightarrow \underline{\underline{M = \frac{5}{2} m}}$$

Kinetisk energi før kollisjonen er omdannet til hvileenergi etter kollisjonen, og dermed økt masse.

Eks 3:

Bestem \vec{u}
(målt i S)

Løsn 3: Her er $\vec{v} = v \hat{x}$, $\vec{u} = \bar{u}_x \hat{x} + \bar{u}_y \hat{y}$ med $\bar{u}_x = 0$, $\bar{u}_y = -c$,
og $\vec{u} = u_x \hat{x} + u_y \hat{y}$ skal bestemmes.

Fra s. 123:

$$u_x = (\bar{u}_x + v) / (1 + \bar{u}_x v / c^2) = v$$

$$u_y = (\bar{u}_y / \gamma) / (1 + \bar{u}_x v / c^2) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \bar{u}_y = -c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = v \hat{x} - c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \hat{y}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{v^2 + c^2 (1 - v^2/c^2)} = c \quad \text{OK!}$$

Hvis $v = c$: $u_x = c$, $u_y = 0$, $u = |\vec{u}| = c$

Hvis $\bar{u}_x = -v$ og $\bar{u}_y = -\sqrt{c^2 - v^2}$ (slik at

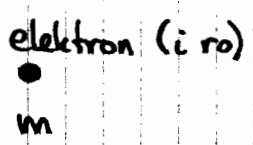
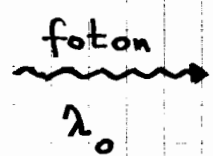
$$\bar{u} = \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} = c):$$

$$u_x = (-v + v) / (1 - v^2/c^2) = 0$$

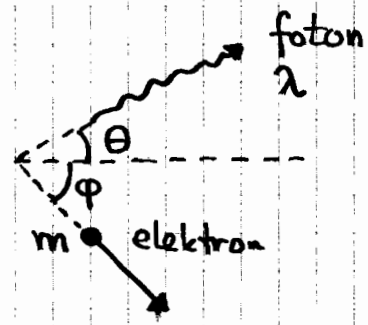
$$u_y = -\sqrt{c^2 - v^2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} / (1 - v^2/c^2) = -c$$

$$u = |\vec{u}| = c$$

Eks 4: Compton - effekten



Etter:



Bestem λ , uttrykt ved λ_0 , m og θ .

Løsn. 4:

Foton før kollisjon: energi E_0 , impuls E_0/c (null masse)

Elektron ———: ——— mc^2 , null impuls

Foton etter: impuls \vec{p}_f , energi $E_f = p_f c$

Elektron ———: ——— \vec{p}_e , energi E_e ; $E_e^2 = (mc^2)^2 + (p_e c)^2$

Impulsbevarelse vertikalt: $p_e \sin \phi = p_f \sin \theta$

$$\Rightarrow \sin \phi = \frac{p_f}{p_e} \sin \theta = \frac{E_f}{p_e c} \sin \theta \Rightarrow \cos \phi = \sqrt{1 - \left(\frac{E_f \sin \theta}{p_e c}\right)^2}$$

Impulsbevarelse horisontalt: $\frac{E_0}{c} = p_f \cos \theta + p_e \cos \phi$

$$\Rightarrow E_0 = E_f \cos \theta + p_e c \sqrt{1 - \left(\frac{E_f \sin \theta}{p_e c}\right)^2}$$

$$\Rightarrow (E_0 - E_f \cos \theta)^2 = (p_e c)^2 - E_f^2 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow p_e^2 c^2 = E_0^2 - 2E_0 E_f \cos \theta + E_f^2$$

Energibevarelse:

$$E_0 + mc^2 = E_f + E_e = E_f + \sqrt{(mc^2)^2 + (p_e c)^2}$$

$$= E_f + \sqrt{m^2 c^4 + E_0^2 - 2E_0 E_f \cos \theta + E_f^2}$$

$$\Rightarrow (E_0 + mc^2 - E_f)^2 = m^2 c^4 + E_0^2 - 2E_0 E_f \cos \theta + E_f^2$$

$$= E_0^2 + m^2 c^4 + E_f^2 + 2E_0 mc^2 - 2E_0 E_f - 2mc^2 E_f$$

$$\Rightarrow E_f (E_0 - E_0 \cos \theta + mc^2) = E_0 mc^2$$

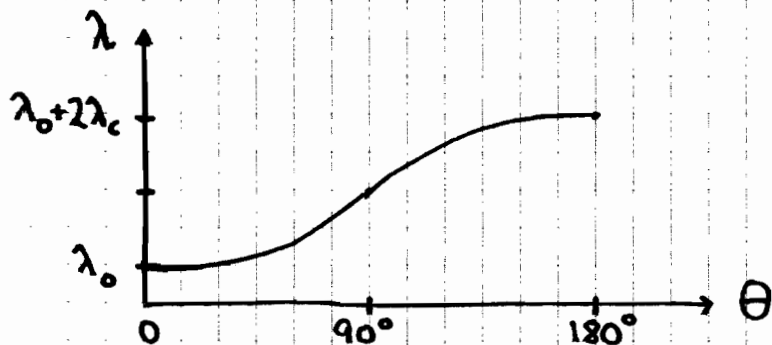
$$\Rightarrow E_f = \frac{E_0 mc^2}{E_0 (1 - \cos \theta) + mc^2} = \frac{1}{(1 - \cos \theta)/mc^2 + 1/E_0}$$

Max Plancks kvantehypotese (1900): $E = hf$; $h = \text{Plancks konstant}$

$$\Rightarrow E_f = hc/\lambda ; E_0 = hc/\lambda_0 \quad (\approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js})$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{hc} = \frac{1 - \cos \theta}{mc^2} + \frac{\lambda_0}{hc}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)}}$$



Stemmer godt med eksperimenter.

"Compton-bølglængden": $\lambda_c = \frac{h}{mc}$

$$\text{For elektronet: } \lambda_c = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ m} \approx 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0.024 \text{ \AA}$$

A. H. Compton, Physical Review 21, 483 (1923)