Mekanisk Fysikk – Oppsummering

Klassisk dynamikk

$\vec{v} = d\vec{r}/dt, \quad \vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$

$d\vec{r} = \vec{v}\,dt, \quad d\vec{v} = \vec{a}\,dt$

Sirkelbevegelse:

$d\varphi = ds/r, \quad \omega = d\varphi/dt, \quad \alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$

$v = ds/dt = r\,d\varphi/dt = r\omega$

$a_\perp = -\omega^2 r = -v^2/r, \quad a_\parallel = dv/dt = r\,d\omega/dt = r\alpha$

$T = 2\pi r/v, \quad f = 1/T, \quad \omega = 2\pi/T = 2\pi f$

Newtons lover:

N1: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$

N2: $\vec{F} = m\vec{a} = m\,d\vec{v}/dt = d\vec{p}/dt$ [Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$]

N3: $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Gravitasjon: $F = \dfrac{GmM}{r^2}$; G = gravitasjonskonstanten

Tyngde: $F = mg$; $g = G\cdot M/R^2 = 9.81\ \text{m/s}^2$ på jordas overflate

Kontaktkrefter: Normalkraft, Snordrag, Friksjon

Tørr friksjon: Statisk: $f \le \mu_s N$; Kinetisk: $f = \mu_k N$

Våt friksjon: Laminær strømning: $\vec{f} = -kv\hat{v}$

Turbulent –"– : $\vec{f} = -Dv^2\hat{v}$

Arbeid: $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ Effekt: $P = dW/dt = \vec{F}\cdot\vec{v}$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Konservativ kraft: $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

Potensiell energi: $U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (kons. kraft $\vec{F}$)

Mekanisk energi, $E = K + U$, er bevart i kons. system

Friksjonsarbeid: $W_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ ($\vec{f}$ <u>ikke</u> kons.)

Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$. Hvis ytre $\vec{F} = 0$, er $\vec{p}$ = konstant (N1)

$$\Delta\vec{p} = \int \vec{F} \cdot dt \quad (\text{da } \vec{F} = d\vec{p}/dt;\ \text{N2})$$

Kollisjoner: $\Delta\vec{p} = 0$ hvis $\vec{F}_{ytre} = 0$

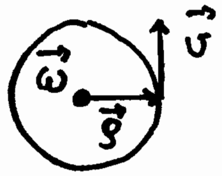
Elastisk: $\Delta K = 0$ Uelastisk: $\Delta K < 0$ Fullstendig uelastisk: max$|\Delta K|$

Massesenter: $\vec{R}_{CM} = \int \vec{r}\, dm \Big/ \int dm = \int \vec{r}\, dm / M$ ($\approx$ Tyngdepunkt)

Tyngdepunktbevegelse: $M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}$

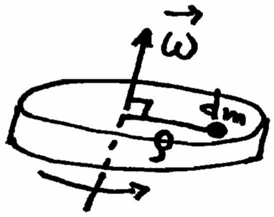
Rotasjon:

Vinkelhastighetsvektor: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$



($\vec{\omega}$ opp)

Rotasjonsenergi: $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$



Treghetsmoment: $I = \int \rho^2\, dm$

Stivt legeme: $K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

↳ mhp akse gjennom CM

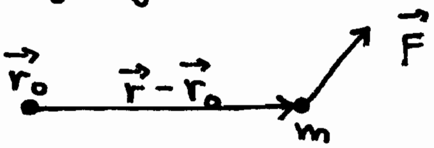
Steiners sats: $I = I_0 + M d^2$

Ren rulling: $V = \omega R$, $A = \alpha R$ (rullebetingelser)

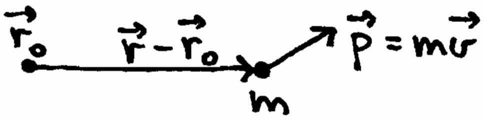
Sluring: Relativ hastighet i kontaktpunktet $v = V - \omega R \neq 0$

$\Rightarrow$ effekttap $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ pga friksjon

Dreiemoment: $\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$



Dreieimpuls: $\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p}$



N2 for rotasjon: $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ ("spinnsatsen")

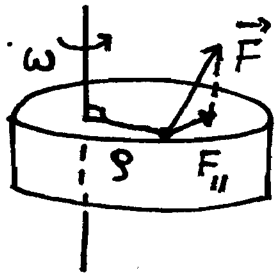
Arbeid ved rotasjon: $dW = \tau \, d\varphi$; Effekt: $P = \tau\omega$

Stivt legeme: $\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$

N2, rotasjon om fast akse:

$\tau = I \frac{d\omega}{dt}$; $\tau = F_{\parallel} \cdot \varrho$

$I = \int \varrho^2 \, dm$



($F_{\parallel} \perp \varrho$)

Bevaringslover:

- For isolert system er total energi, impuls og dreieimpuls bevart.
- For konservativt system er mekanisk energi, $E = K + U$, bevart.
- Når netto $\vec{F}_{ytre}$ er null, er impuls $\vec{p}$ bevart.
- Når netto $\vec{\tau}_{ytre}$ er null, er dreieimpuls $\vec{L}$ bevart.

Mekanisk likevekt (Statikk):

Stivt legeme er i ro, $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, bare hvis netto $\vec{F}_{ytre} = 0$ og netto $\vec{\tau}_{ytre} = 0$.

Svingninger

Harmonisk oscillator:

$F = -kx$ (Hookes lov) $\overset{N2}{\Rightarrow} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ med $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$T = 2\pi/\omega_0 = 1/f$

$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, $U = \frac{1}{2} k x^2$, $E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 =$ konstant

Med friksjon $f = -b\dot{x}$: $x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$ ($\gamma < \omega_0$)

$\gamma = b/2m$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$ ($\gamma > \omega_0$)

$\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungen svingning: $F_{ytre} = F_0 \cos \omega t$

Resonans: $x(t) = x_p(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi)$ $[x_h \approx 0$ når $\gamma t \gg 1]$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\left\{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\right\}^{-1/2}$$

$\Delta\omega = 2\gamma$ = halvverdibredde

$Q = \omega_0/\Delta\omega$ = Q-faktor

Matematisk pendel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$; $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ (små utsving)

Fysisk pendel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$; $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$ (små utsving)

Bølger

Transversal: partiklene svinger $\perp$ forplantningsretningen

Longitudinal: ——"—— $\parallel$ ——"——

Harmonisk bølge: $y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t)$

$k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T$, $v = \lambda/T = \omega/k$, $f = 1/T = v/\lambda$

Transv. bølge på streng: $v = \sqrt{S/\mu}$

Longit. bølge i fluid (lyd!): $v = \sqrt{B/\rho}$

Lydbølge i tynn stang: $v = \sqrt{E/\rho}$

Lydbølge i bulk faststoff: $v_p = \sqrt{(B+4G/3)/\rho}$ (Longit.)

$v_s = \sqrt{G/\rho}$ (transv.)

$E = (F/A)/(\Delta L/L_0)$

$B = -(\Delta F/A)/(\Delta V/V_0) = -\Delta p/(\Delta V/V_0)$

$G = (F/A)/(\Delta x/L) = (F/A)/\tan\theta$

Bølgeligning: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$; $\xi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$

Energitetthet, transv. bølge på streng: $\varepsilon = \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ (J/m)

——"——, plan lydbølge: $\varepsilon = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$ (J/m^3)

Midlere energitetthet i harmoniske bølge:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \varepsilon(x,t)\,dx \quad ; \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{T} \varepsilon(x,t)\,dt$$

Intensitet: I = overført effekt pr flateenhet $= \frac{\bar{P}}{A} = \bar{\varepsilon} \cdot v$

Desibelskalaen: $\beta = \#\,dB = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$; $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$

Kulebølge: $I(r) \sim 1/r^2$ Sylinderbølge: $I(r) \sim 1/r$ Plan bølge: I = konst.

Stående bølger:

Streng med to faste eller to fri ender: $\lambda_n = 2L/n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$

Streng med en fast og en fri ende: $\lambda_n = 4L/(2n-1)$ (— " —)

Tilsvarende for lydbølge i tynt rør.

Grunntone: $n = 1$. Overtoner: $n = 2, 3, \dots$

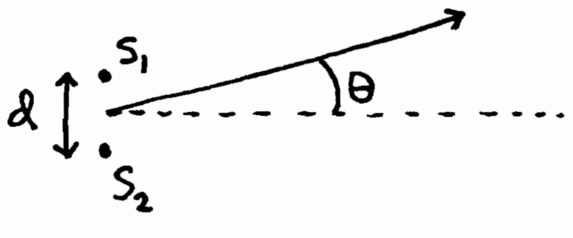
Dopplereffekt: $f_O = \frac{v + v_m - v_O}{v + v_m - v_S} \cdot f_S$ $\begin{bmatrix} O: \text{observatør} \\ S: \text{kilde} \\ m: \text{medium} \end{bmatrix}$

Svevning: $I(t) \sim 1 + \cos(\Delta\omega \cdot t)$; $\Delta\omega = 2\pi |f_1 - f_2| = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$

Interferens: Max intensitet der bølgene er i fase.

Min — " — — " — i motfase.

Retningsavhengig interferens:



max I for $d \cdot \sin\theta = n \cdot \lambda$

min I for $d \cdot \sin\theta = (n + 1/2) \cdot \lambda$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

Harmonisk bølge i 3D: $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

Longit: $\vec{\xi} \parallel \vec{v}$ Transv: $\vec{\xi} \perp \vec{v}$

$\vec{k} \parallel \vec{v}$, $k = 2\pi/\lambda$, $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$

Refleksjon og transmisjon på streng:

$$y_{ro} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\, y_{io}$$

$R = \bar{P}_r / \bar{P}_i = (y_{ro}/y_{io})^2$

$T = \bar{P}_t / \bar{P}_i = 1 - R$

$$y_{to} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\, y_{io}$$

Gruppehastighet: $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ Fasehastighet: $v_f = v = \dfrac{\omega}{k}$

Dispersjonsrelasjon: $\omega(k)$

Tyngdebølger på vann: $\omega(k) = \{gk \tanh kD\}^{1/2}$; D = dybden

Gravitasjon:

K1: Ellipseformede planetbaner, $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$

K2: dA/dt = konst.

K3: T^2/a^3 = konst. for alle planetene ; a = store halvakse

Gravitasjonsloven: $\vec{F} = (-Gm_1m_2/r^2)\,\hat{r} \Rightarrow U(r) = -Gm_1m_2/r$

Satellitt i sirkulær bane: $v = \sqrt{GM/r}$. Geostasjonær: T = 24 timer

Gravitasjonsfelt: $\vec{g} = \vec{F}/m = (-GM/r^2)\,\hat{r}$; $\vec{g} = -\hat{r}\, dV/dr$

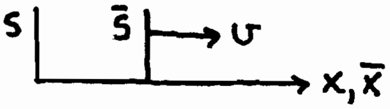
Gravitasjonspotensial: $V(r) = U(r)/m = -GM/r$; $V(r) = -\int_{r_0}^{r} \vec{g}\cdot d\vec{r}$

Massefordeling: $V = -G\int dm/r$

Spesiell relativitetsteori:

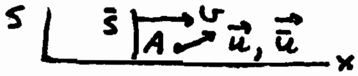
1. Alle fysikkens lover er de samme i alle inertialsystem
2. Lysets hastighet i vakuum er den samme, c, for alle observatører

Lorentztransformasjonene:



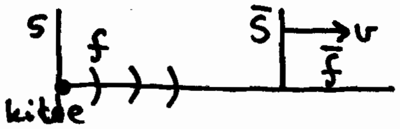
$$\bar{x} = \gamma(x - vt), \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$
$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}), \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right)$$
$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

Relative hastigheter:



$$u_x = (\bar{u}_x + v)/(1 + \bar{u}_x v/c^2), \quad u_y = (\bar{u}_y/\gamma)/(1 + \bar{u}_x v/c^2), \quad u_z = \frac{\bar{u}_z/\gamma}{1 + \bar{u}_x v/c^2}$$

Dopplereffekt for e.m. bølger:



$$\bar{f} = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}\, f$$

Relativistisk mekanikk:

Impuls: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ Kin. energi: $K = (\gamma - 1)mc^2$

Hvileenergi: $E_0 = mc^2$ Total energi: $E = E_0 + K = \gamma mc^2$

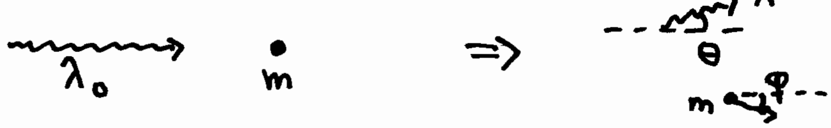
For gitt partikkel: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$

For alle prosesser i et isolert system er <u>total</u> relativistisk energi E og <u>total</u> rel. impuls $\vec{p}$ <u>bevart</u>.

Elastisk rel. prosess: E, $\vec{p}$, K, m bevart

Uelastisk ——"——: E, $\vec{p}$ bevart ; K, m ikke bevart

Comptoneffekten:



Elastisk kollisjon mellom foton og partikkel med masse m

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

h = Plancks konstant $= 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js

Foton: $E = pc = hf = hc/\lambda$