25.08.14 ①

Størrelser og enheter. SI-systemet. [YF 1]

Eks: Tid, $T = 730\ ms$

fysisk størrelse — Tid; symbol — T; måltall — 730; enhet — s; dekadisk prefiks — m

(1 ms = 1 millisekund $= 10^{-3}$ s)

Notasjon: $[T] = s$ ("enheten til tid er sekund")

Størrelse	Vanlige symboler	Enhet		
tid	t, T, τ ...	s	Mekanikk	Grunn-enheter
lengde	$l, s, \Delta x$ ...	m	Mekanikk	Grunn-enheter
masse	m, M ...	kg	Mekanikk	Grunn-enheter
temperatur	T	K	Termisk fys, Kjemi	Grunn-enheter
stoffmengde	n	mol	Termisk fys, Kjemi	Grunn-enheter
elektrisk strømstyrke	I	A	Elmag	Grunn-enheter
(lysstyrke	I	cd)		Grunn-enheter
hastighet	v, V ...	m/s	Sammensatte enheter	
akselerasjon	a, A ...	m/s^2	Sammensatte enheter	
kraft	F, f, S, ...	$kg\,m/s^2 \equiv N$	Avledete enheter	
trykk	p, P	$N/m^2 \equiv Pa$	Avledete enheter	
energi	E, W, K, U ...	$Nm \equiv J$	Avledete enheter	
effekt	P	$J/s \equiv W$	Avledete enheter	
⋮				

Dekadiske prefikser:

10^{-12} = p = piko, 10^{-9} = n = nano, 10^{-6} = μ = mikro ...

... 10^{6} = M = mega, 10^{9} = G = giga, 10^{12} = T = tera

Eks: Hvor langt går lys i vakuum på et nanosekund?

Løsn: $v(\text{lys}) = c = 299792458 \text{ m/s}$

$\Rightarrow \ell = c \cdot t = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10^{-9} \text{s} \approx \underline{0.30 \text{ m}}$

Eks: En studenthybel bruker ca 4 MWh el. energi pr år.

Hvor mye er dette i SI-enhet?

Løsn: $4 \text{ MWh} = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 144 \cdot 10^8 \text{ J} = \underline{14.4 \text{ GJ}}$

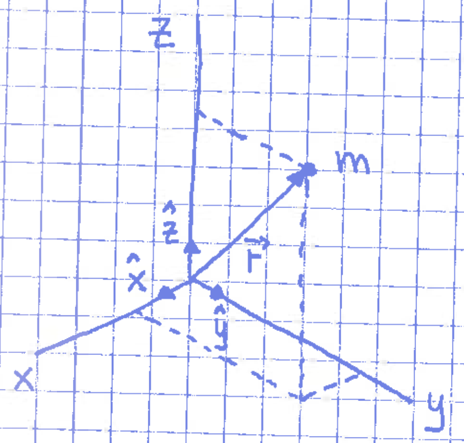
Hva er midlere effekt?

$P = 4 \cdot 10^6 \text{ Wh} / (365 \cdot 24 \text{ h}) \approx 457 \text{ W} \approx \underline{0.5 \text{ kW}}$

Kinematikk [YF 2, 3 ; LL 1]

"bevegelsesbeskrivelse"

Først punktmasser. [Senere stive legemer; rotasjon etc]



$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$

$=$ posisjonen til m ved tid t

(målt i fast, høyrehendt kartesisk koordinatsystem)

Enhetsvektorer: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

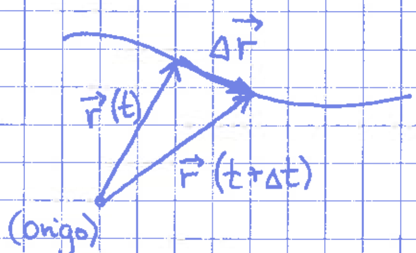
$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad \text{(dimensjonsløse)}$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \ldots = 0$$

28.08.14 (3)

Beskriver bevegelsen med banen $\vec{r}\,(t)$:



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t+\Delta t) - \vec{r}\,(t)$$

$=$ forflytning på tida Δt

Hastighet $\overset{(def)}{=}$ forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v}\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\underset{(\Delta t \text{ er skalar})}{\Longrightarrow}$ $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$ (dvs $\vec{v}$ er tangentiell til banen)

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a}\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Standard notasjon: $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ osv.

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Komponentform (kartesisk):

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y} + v_z\,\hat{z} \\ d\vec{r}/dt &= \frac{dx}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy}{dt}\,\hat{y} + \frac{dz}{dt}\,\hat{z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{osv}$$

Tilsv: $a_x = \dot{v}_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$ osv

M.a.o: $\vec{r} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{a}$

Forrenkler: $\vec{a} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{r}$

Først 1D:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \Rightarrow dx = v_x \, dt \Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt$$

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x \Rightarrow dv_x = a_x \, dt \Rightarrow \int_{v_x(t_0)}^{v_x(t)} dv_x = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt$$

$$\Rightarrow v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt$$

Generalisering til 3D:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt$$

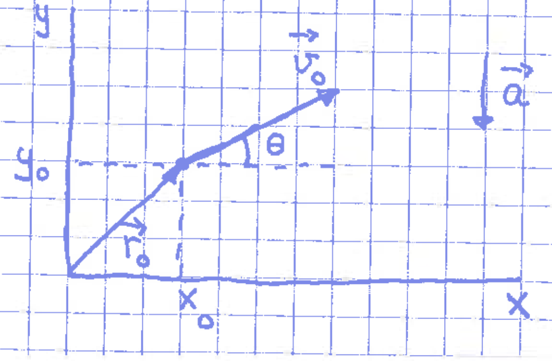
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt \Rightarrow \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

Eks: Kast.

Ved $t_0 = 0$:



Initialbetingelser:

$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

Konstant aks: $\vec{a} = -g\,\hat{y}$

- Bestem $\vec{r}(t)$
- Bestem $y(x)$

Løsn: Generelt, med $\vec{a}$ = konst:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}\, dt = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t [\vec{v}_0 + \vec{a}t]\, dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\cdot t + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot t^2$$

Her: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$; $a_x = 0$, $a_y = -g$

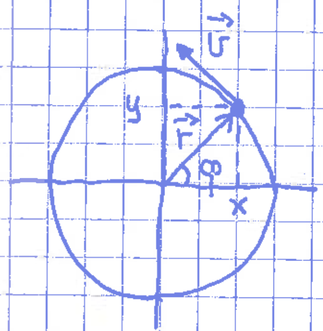
$v_{0x} = v_0 \cos\theta$, $v_{0y} = v_0 \sin\theta$

$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t \cos\theta$; $y(t) = y_0 + v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$

Eliminasjon av t gir (gjør selv!)

$$y = y_0 + (x - x_0)\tan\theta - \frac{g\,(x-x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}\,,$$ dvs parabel

Sirkelbevegelse [YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]



Lurt med polarkoord. (r, φ):

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom x-aksen og $\vec{r}$

($\varphi > 0$ mot klokka)

Fra figuren: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\tan\varphi = y/x$

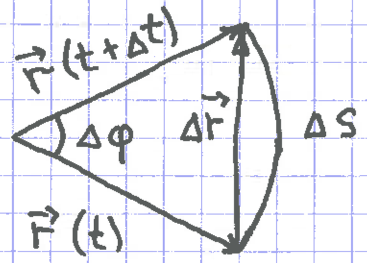
$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (= konst. ved sirkelbev.)

$\vec{r} = \hat{x}\, r\cos\varphi + \hat{y}\, r\sin\varphi$

Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde / radius :



$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$$

Enheter: $[\varphi] = \left[\frac{s}{r}\right] = \frac{m}{m} = 1$; $[\omega] = \left[\frac{\varphi}{t}\right] = s^{-1}$

Når $\Delta t \to 0$:

$$\Delta\varphi \to 0 \,, \quad \Delta r = |\Delta\vec{r}| \to \Delta s = r\,\Delta\varphi \,, \quad \Delta\vec{r} \perp \vec{r}$$

Dermed :

$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r\,d\varphi}{dt} = \underline{r\omega}$$

$$\vec{v} \parallel \Delta\vec{r} \quad \text{og} \quad \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r}$$

<u>Uniform</u> sirkelbevegelse :

$$v = \text{konst.} \,, \quad \omega = \text{konst.}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad \Rightarrow \quad \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \omega \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t$$

Velger $\varphi(0) = 0$: $\quad \varphi(t) = \omega t$

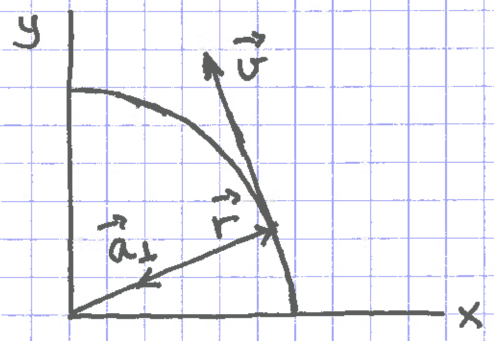
Dermed:

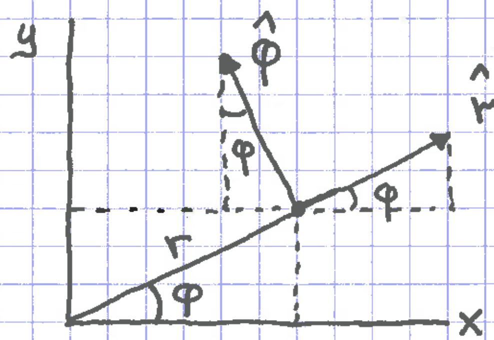
$$\vec{r}(t) = r\cos\omega t\ \hat{x} + r\sin\omega t\ \hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = -r\omega\sin\omega t\ \hat{x} + r\omega\cos\omega t\ \hat{y}$$

$$\vec{a}_\perp(t) = -r\omega^2\cos\omega t\ \hat{x} - r\omega^2\sin\omega t\ \hat{y}$$

Dvs: $\boxed{\vec{a}_\perp = -\omega^2\vec{r}}$ Sentripetalakselerasjon





Enhetsvektorer:

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

$$|\hat{r}| = |\hat{\varphi}| = 1\ ; \quad \hat{r}\cdot\hat{r} = 1 = \hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi}\ ; \quad \hat{r}\cdot\hat{\varphi} = 0$$

Dermed:

$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

$$\vec{v} = v\,\hat{\varphi} = r\omega\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{a}_\perp = -\omega^2 r\,\hat{r} = -\frac{v^2}{r}\,\hat{r}$$

Merk: $\hat{r}$ og $\hat{\varphi}$ avhenger av t