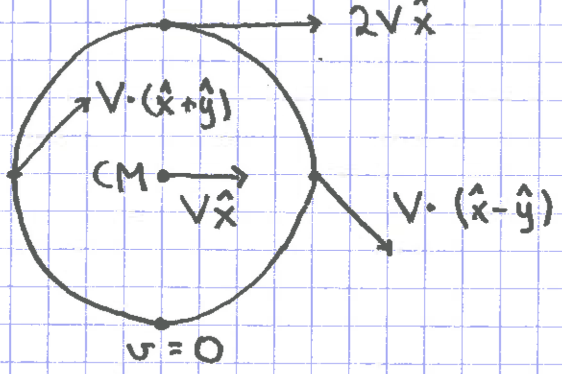


Dvs: Ingen relativ bevegelse i kontaktpunktet ved ren rulling.

Kin. energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

$I_0 = c\cdot MR^2$ (ring: $c=1$; kuleskall: $c=\frac{2}{3}$ etc)

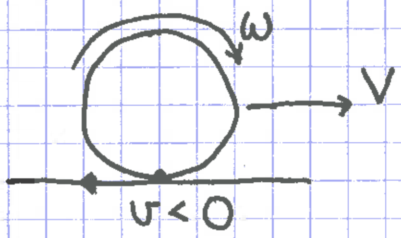
$\omega = V/R$ (rullebet.)

$$\Rightarrow \boxed{K = (1+c)\cdot\frac{1}{2}MV^2}$$

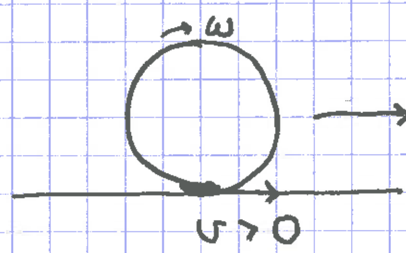
Sluring

Hvis $\omega \neq V/R$, er rel. hast. $v = V - \omega R \neq 0$ mellom legeme og underlag i kontaktpunktet
$\Rightarrow$ Legemet roterer og glir ; det slurer.

$\omega > V/R$:

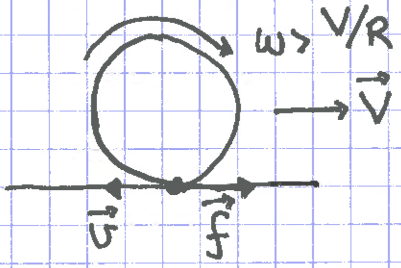


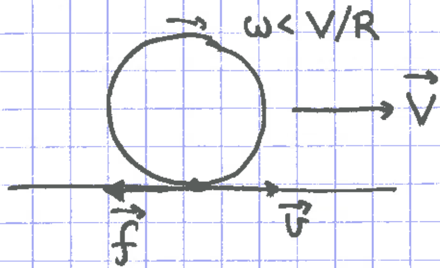
$\omega < V/R$:



Friksjonens rolle

Sluring:





$\vec{f}$ alltid rettet mot ~~…~~ $\vec{v}$; $f = |\vec{f}| = \mu_k \cdot N$

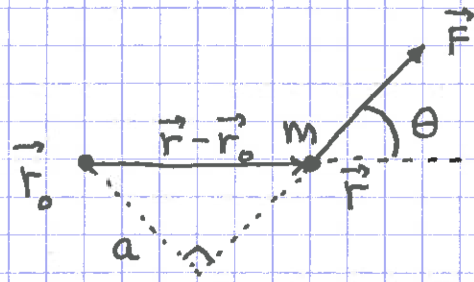
Effekttap : $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow$ tap av mek. energi

Ren rulling :

$v = 0 \Rightarrow P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$ mek. energi bevart

Statisk friksjon, $f \leq \mu_s \cdot N$. Retning : $\vec{f}$ mot "tenkt relativhastighet" $\vec{v}$ hvis det ikke var friksjon.

Dreiemoment   [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



Dreiemomentet $\vec{\tau}$ på m, relativt det valgte referansepunktet $\vec{r}_0$:

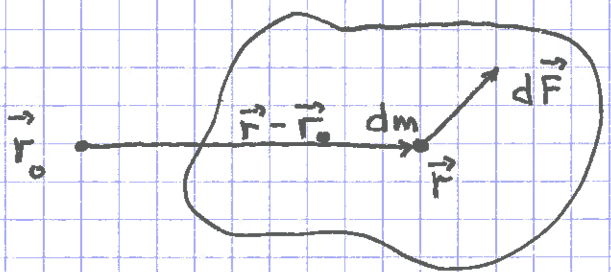
$$\boxed{\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}}$$

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og
$\vec{\tau} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$ ($\vec{\tau}$ opp i figuren ; h.h.regel)

Abs.verdi: $|\vec{\tau}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta$

$$= a \cdot F \qquad \text{(arm} \cdot \text{kraft)}$$

For partikkelsystem:

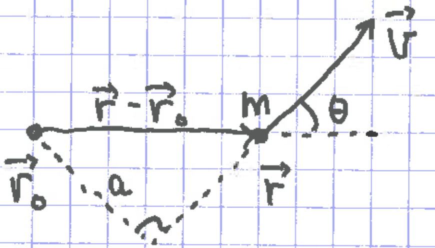


Dreiemoment på dm : $d\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$

Totalt dreiemoment på legemet:

$$\vec{\tau} = \int d\tau = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]



Dreieimpulsen til m, relativt $\vec{r}_0$:

$$\boxed{\vec{L} = (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{p} = m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v}}$$

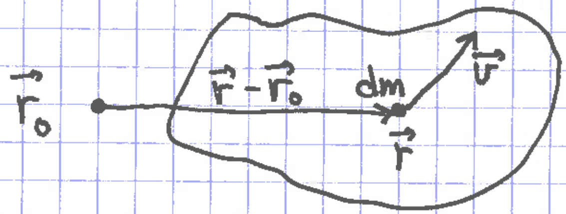
Retning: $\vec{L} \perp \vec{p}$ og

$\vec{L} \perp \vec{r}-\vec{r}_0$ ($\vec{L}$ opp i fig.)

Abs.verdi: $|\vec{L}| = |\vec{r}-\vec{r}_0|\cdot|\vec{p}|\cdot\sin\theta$

$= a\cdot p$ (arm · impuls)

For partikkelsystem:



Dreieimpulsen til dm: $d\vec{L} = (\vec{r}-\vec{r}_0)\times d\vec{p}$

$= dm\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v}$

Total dreieimpuls for legemet:

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v}\,dm$$

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]
(Spinnsatsen)

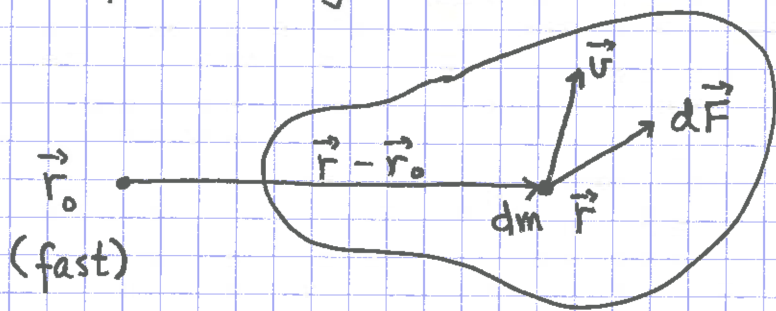
N2 : $\vec{F} = m\vec{a} = m\, d\vec{v}/dt = d\vec{p}/dt$

Anta fast $\vec{r}_0$, dvs $\dot{\vec{r}}_0 = 0$, evt. $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{ m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v} \right\} = \underbrace{m(\vec{v}-\dot{\vec{r}}_0)\times\vec{v}}_{=0} + m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{a}$$

$$= (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{F} = \vec{\tau}$$

For partikkelsystem :



N2 for dm:
$d\vec{F} = dm \cdot \vec{a}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\int d\vec{L} = \frac{d}{dt}\int (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v}\, dm$$

$$= \underbrace{\int (\vec{v}-\dot{\vec{r}}_0)\times\vec{v}\, dm}_{=0} + \int (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{a}\, dm$$

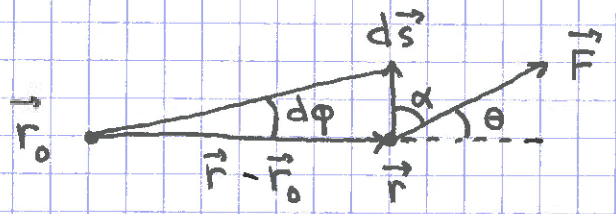
$$= \int (\vec{r}-\vec{r}_0)\times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ N2, rot.

$\vec{\tau}$ = netto dreiemoment på legemet

$\vec{L}$ = legemets dreieimpuls

Arbeid ved rotasjon [YF 10.4 ; LL 6.4]



$d\vec{s} \perp \vec{r}-\vec{r}_0$

$\alpha = \pi/2 - \theta$

$\cos\alpha = \sin\theta$

Arbeid utført av $\vec{F}$ ved rotasjon $d\varphi$:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = |\vec{F}|\cdot|d\vec{s}|\cdot\cos\alpha$$

$$= |\vec{F}|\cdot|\vec{r}-\vec{r}_0|\,d\varphi\cdot\sin\theta = \tau\, d\varphi$$

Tilført effekt:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau\, d\varphi}{dt} = \tau\omega$$

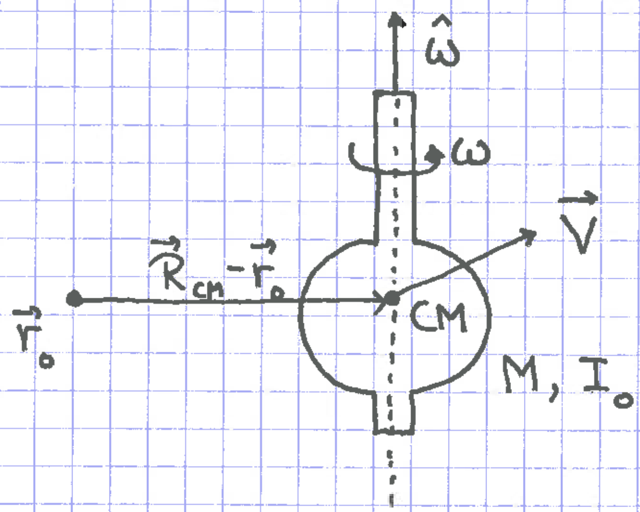
$\Rightarrow$ Ved rotasjon: $\boxed{dW = \tau\, d\varphi}$ $\boxed{P = \tau\omega}$

Sammenlign translasjon:

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5 ; LL 6.6]

Forbehold: Legeme med ~~sylinder~~refleksjons-symmetri om rotasjonsaksen.



Fra før: $K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$

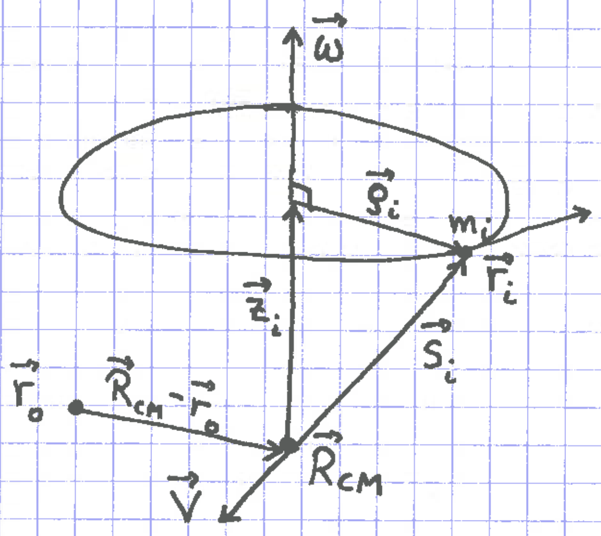
Tilsvarende:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM}-\vec{r}_0)\times\vec{V} + I_0\vec{\omega}}$$

Banedreieimpuls relativt $\vec{r}_0$: $\vec{L}_b = M(\vec{R}_{CM}-\vec{r}_0)\times\vec{V}$

Indre dreieimpuls (Spinn), uavh. av $\vec{r}_0$: $\vec{L}_s = I_0\vec{\omega}$

Bevis:



$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i$$
$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{u}_i$$
$$\vec{s}_i = \vec{z}_i + \vec{\varrho}_i$$
$$\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i = \vec{\omega} \times (\vec{s}_i - \vec{z}_i)$$
$$= \vec{\omega} \times \vec{s}_i \qquad (\vec{\omega} \parallel \vec{z}_i)$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i$$
$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0 + \vec{s}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i)$$
$$= \sum_i m_i \left\{ (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \vec{s}_i \times \vec{V} + (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i + \vec{s}_i \times \vec{u}_i \right\}$$

1. sum: $\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = \vec{L}_b$

2. sum: $\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = (M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = 0$

3. sum: $\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i = \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$

$$= (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{s}_i}_{=0}) = 0$$

4. sum: $\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i$ = bidraget til $\vec{L}$ pga bevegelse relativt CM

(Så langt, helt generelt.)

$$\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$$

Vektoridentitet : $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}\,(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}\,(\vec{A} \cdot \vec{B})$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) = \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega}\, s_i^2 - \vec{s}_i\,(\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) \right\}$$

$$= \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega}\,(z_i^2 + \rho_i^2) - (\vec{z}_i + \vec{\rho}_i)\, z_i \omega \right\}$$

$$= \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega}\,(z_i^2 + \rho_i^2) - z_i^2 \vec{\omega} - z_i \omega \vec{\rho}_i \right\}$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2\, \vec{\omega}}_{= I_0 \vec{\omega} = \vec{L}_s} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$$

For <u>vilkårlig</u> stivt legeme bidrar leddet $-\omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i$,

<u>men</u> med <u>~~sylinder~~ refleksjons-symmetri om $\hat{\omega}$</u>, dvs om $\hat{z}$:

$$\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = \sum_i m_i z_i (x_i \hat{x} + y_i \hat{y}) = 0$$

fordi bidrag fra (x_i, y_i) kanselleres av bidraget fra $(-x_i, -y_i)$.

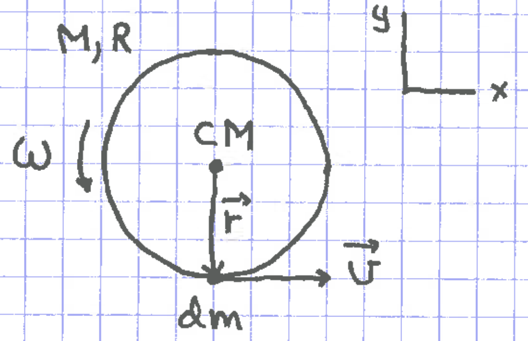
Dermed:

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

qed

Dreieimpuls, eksempler.

Eks 1: Ring, ren rotasjon om CM



Velger $\vec{r}_0 = \vec{R}_{CM} = 0$

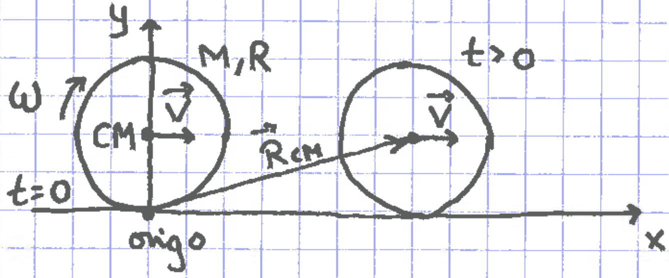
$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v}\, dm$$
$$= R \cdot \omega R\, \hat{z} \cdot dm$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \int d\vec{L} = \int \omega R^2 \hat{z}\, dm = MR^2 \omega \hat{z} = \underline{\underline{I_0 \vec{\omega}}}$$

Dvs: $\vec{L} = \vec{L}_s$; $\vec{L}_b = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = 0$

Eks 2: Rullende ring $(V = \omega R)$



(a) $\vec{r}_0 = \vec{R}_{CM}$; $\vec{L}_{CM} = ?$

(b) $\vec{r}_0 = 0$; $\vec{L}_0 = ?$

Løsning:

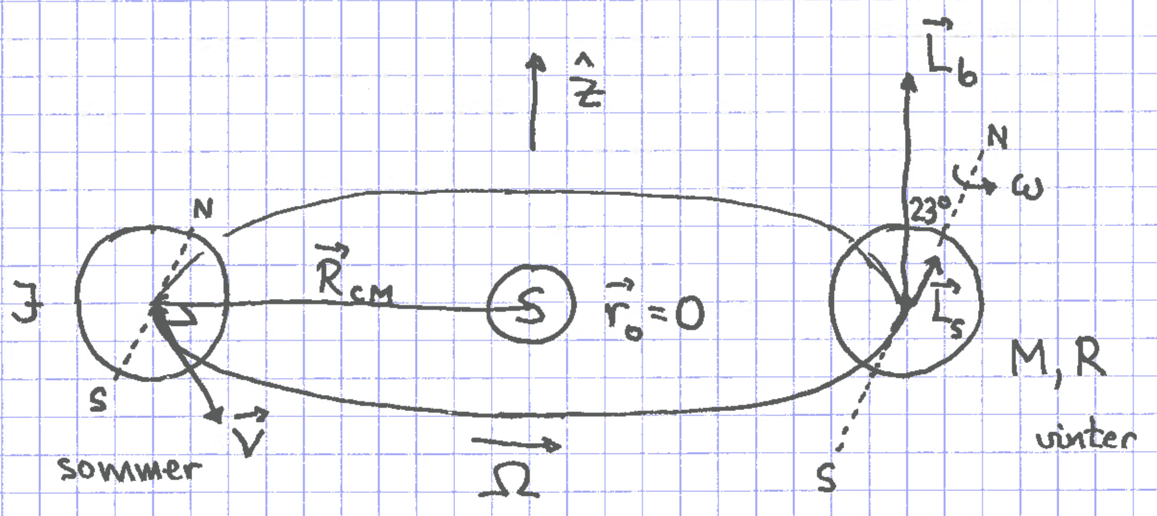
(a) Som eks. 1, med $\vec{\omega} = -\omega \hat{z} \Rightarrow \vec{L}_{CM} = I_0 \vec{\omega} = \underline{\underline{-MR^2 \omega \hat{z}}}$

(b) $\vec{L}_0 = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$

$$= -MRV\hat{z} - MR^2 \omega \hat{z}$$

$$= \underline{\underline{-2MR^2 \omega \hat{z}}}$$

Eks 3: $\vec{L}$ for Jorda relativt Sola



$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$
$$= M R_{CM} V \hat{z} + I_0 \omega \hat{N}$$

Tallverdier:

$M \sim 6 \cdot 10^{24}$ kg, $\quad R_{CM} \sim 1.5 \cdot 10^{11}$ m, $\quad \Omega = 2\pi / 1$ år

$\Rightarrow V = R_{CM}\Omega \sim 3 \cdot 10^4$ m/s

$\Rightarrow L_b \sim 2.7 \cdot 10^{40}$ Js

$I_0 \sim \frac{1}{3} M R^2$, $\quad R \sim 6{,}37 \cdot 10^6$ m, $\quad \omega = 2\pi / 1$ døgn

$\Rightarrow L_s \sim 6 \cdot 10^{33}$ Js

Dvs: $L_b \gg L_s$

Bevaringslover, oppsummert

- For isolert system (dvs ingen ytre krefter) er total energi, impuls og dreieimpuls bevart
- Mekanisk energi $E = K + U$ er bevart for konservativt system (dvs ingen dissipasjon av mek. energi pga friksjonsarbeid etc)
- Impuls $\vec{p}$ er bevart for system som ikke påvirkes av netto ytre kraft $\vec{F}$:

N2, $\vec{F} = d\vec{p}/dt \Rightarrow d\vec{p} = 0$ hvis $\vec{F} = 0$

- Dreieimpuls $\vec{L}$ er bevart for system som ikke påvirkes av netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$:

N2, rot., $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt \Rightarrow d\vec{L} = 0$ hvis $\vec{\tau} = 0$

Mekanisk likevekt [YF 11.1-11.3 ; LL 7.1]

Et stivt legeme er i ro,

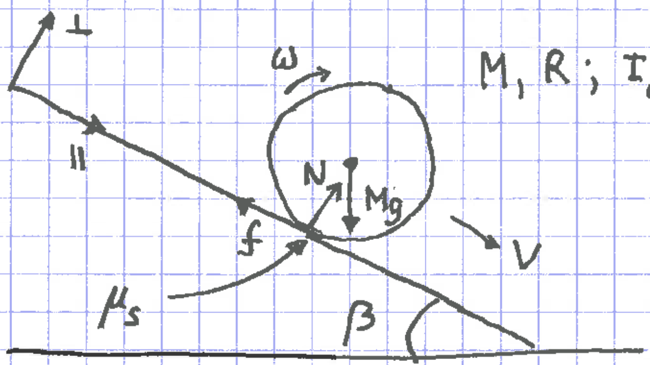
$$\vec{p} = 0 \quad \text{og} \quad \vec{L} = 0,$$

bare dersom

$$\underbrace{\sum_i \vec{F}_i}_{\text{Netto ytre kraft}} = 0 \quad \text{og} \quad \underbrace{\sum_i \vec{\tau}_i}_{\text{Netto ytre dreiemoment}} = 0$$

Rotasjonsdynamikk, eksempler

Eks 1 : Rulling på skråplan [YF 10.3 ; LL 6.8]



$M, R; I_0 = cMR^2$

Anta ren rulling. Bestem $\dot{V}$ og minste "tillatte" μ_s

Løsn: Både V og ω må øke. Må ha dreiemoment τ om CM konsistent med dette. Kun f har arm mhp CM. Dermed: f <u>oppover</u> for å gi $\dot{\omega} > 0$.

N2, ∥ : $Mg \sin\beta - f = M\dot{V}$

N1, ⊥ : $N = Mg\cos\beta$

N2, rot. om CM : $f \cdot R = I_0 \dot{\omega} = cMR^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R} = cMR\dot{V}$

$$f = cM\dot{V}$$

$\Rightarrow$

$$Mg\sin\beta - cM\dot{V} = M\dot{V} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{V} = g \cdot \frac{\sin\beta}{c+1}}}$$

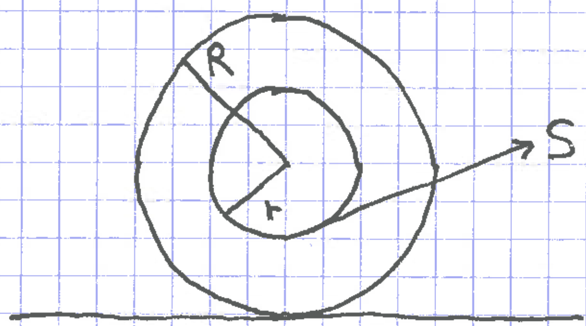
$$f \leq f_{max} = \mu_s N = \mu_s Mg\cos\beta$$

$$\Rightarrow cM \cdot g\,\frac{\sin\beta}{c+1} \leq \mu_s Mg\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{c+1}\tan\beta}}$$

Ring, sylinderskall $(c=1)$: $\dot{V} = \frac{1}{2} g \sin\beta$, $\mu_s^{min} = \frac{1}{2}\tan\beta$

Kompakt kule $(c = 2/5)$: $\dot{V} = \frac{5}{7} g\sin\beta$, $\mu_s^{min} = \frac{2}{7}\tan\beta$

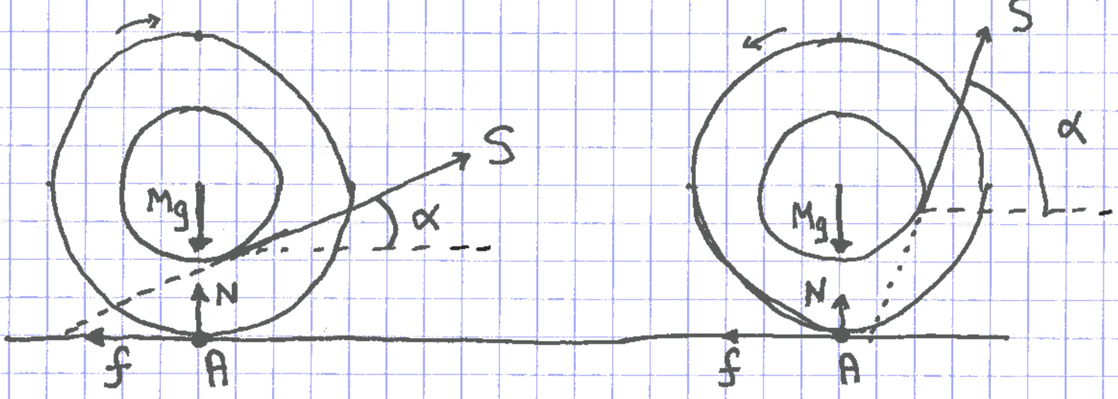
Eks 2: Snelle, Jojo



Anta ren rulling.

Hvilken vei ruller snella?

Løsn: Ingen krefter har arm mhp kontaktpunktet A, unntatt snordraget S:



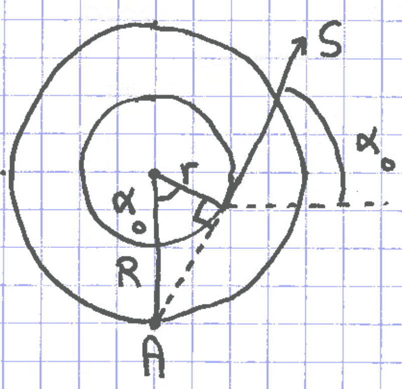
Liten α ⇒ Rot. med klokka

⇒ Ruller mot høyre

Stor α ⇒ Rot. mot klokka

⇒ Ruller mot venstre

Statisk likevekt hvis også S går gjennom A:



$$\Rightarrow \underline{\cos \alpha_0 = r/R}$$

Med $\alpha = \alpha_0$, sklir snella hvis S blir større enn

$\mu_s Mg \,/\, \left(\frac{r}{R} + \mu_s \sqrt{1 - r^2/R^2} \right)$. Vis selv!