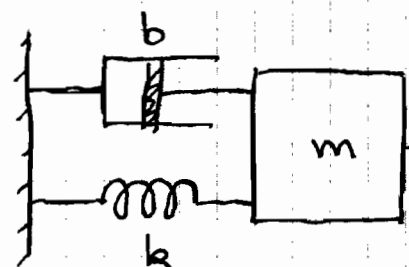


# Trungen svingning. Resonans

[YF 14.8; LL 9.9]

(71)

06.10.14



$$F_y(t) = F_0 \cos \omega t$$

= ytre harmonisk kraft

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$\delta = b/2m$$

$$\omega_0^2 = k/m$$

Løsning:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad \text{slik at}$$

$$\ddot{x}_h + 2\delta\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0 \quad (\text{homogen løsn.})$$

$$\ddot{x}_p + 2\delta\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (\text{partikulærløsn.})$$

I starten bidrar både  $x_h$  og  $x_p$  til innsvingningsforløpet.

Etter hvert blir  $t \gg 1/\delta$  slik at  $e^{-\delta t} \rightarrow 0$  og  $x_h \rightarrow 0$ .

Da er  $x(t) = x_p(t)$ .

$$\text{Vi gjetter } x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Innsetting av  $x_p$ ,  $\dot{x}_p$  og  $\ddot{x}_p$  i N2 gir:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega} \right\}$$

Resonans: Anta svak demping,  $\gamma \ll \omega_0$ . Da blir  $A(\omega)$  stor hvis  $\omega \approx \omega_0$ , dvs ytre kraft "driver" systemet med frekvens  $\omega$  lik systemets eigenfrekvens (resonansfrekvens)  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ :

$A(\omega) \rightarrow \infty$  dersom  $\gamma \rightarrow 0$  og  $\omega \rightarrow \omega_0$

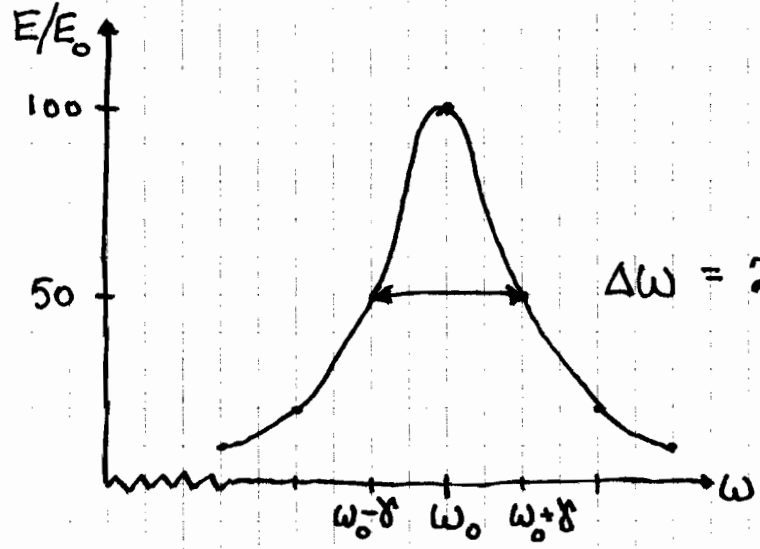
[Jf. Tacoma bridge, 1940]

Oscillatorens energi:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \frac{F_0^2}{m^2} \cdot \frac{\omega_0^4 / \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

$$= \frac{F_0^2}{2k} \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

dimensjonsløs funksjon av  $\omega$



Anta  $\gamma = \omega_0/20$

$\Delta\omega = 2\gamma =$  halvverdi-bredden

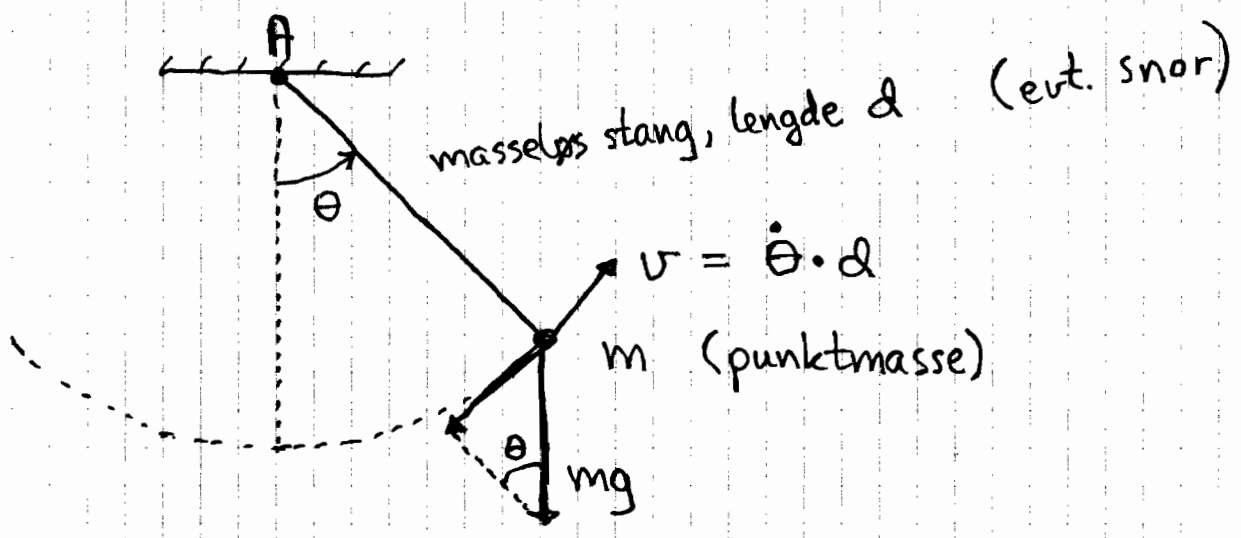
Q-faktor: Mål for hvor "skarp" resonanstoppen er.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad [Q \text{ for } \underline{q}uality!]$$

Dvs: Mindre demping  $\Rightarrow$  Smalere resonans  $\Rightarrow$  Større Q-verdi

[Her er  $Q = 10$ ]

# Matematisk pendel [YF 14.5; LL 9.6]



N2 || sirkelbanen:

$$-mg \sin \theta = m a_{||} = m \dot{v} = m \cdot d \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{d} \sin \theta = 0$$

Kan ikke løses analytisk, med mindre vi hele tiden har små utsving fra likevekt, dvs  $|\theta| \ll 1$ .

Da er  $\sin \theta \approx \theta$ , og vi har enkel harm. osc:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{g/d}$$

Svingeperiode:  $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{d/g}$

Større utsving gir avvik fra harm. osc.

Vi må beholde  $\sin \theta$  i ligningen, som nå må løses numerisk, f.eks slik:

Anta kjente startbetingelser  $\theta(0) = \theta_0$  og  $v(0) = v_0$  (74)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{d} \Rightarrow d\theta = \frac{v}{d} \cdot dt \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{v}{d} \cdot \Delta t$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{\parallel} \Rightarrow dv = a_{\parallel} \cdot dt \Rightarrow \Delta v \approx a_{\parallel} \cdot \Delta t \stackrel{(\text{her})}{=} -g \sin\theta \cdot \Delta t$$

Dermed:

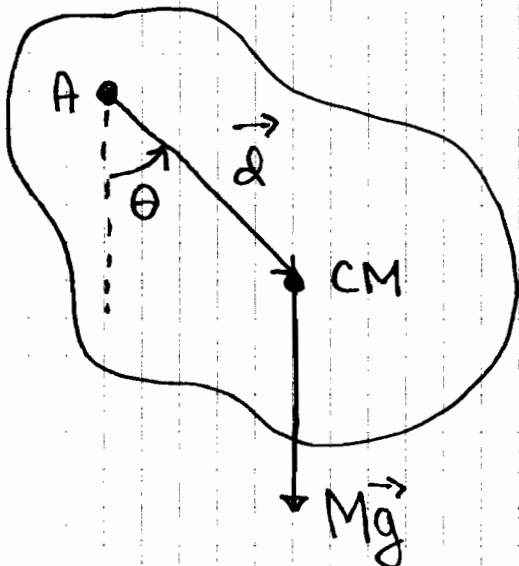
$$\theta(\Delta t) \approx \theta_0 + \frac{v_0}{d} \Delta t ; v(\Delta t) \approx v_0 - g \sin\theta_0 \cdot \Delta t$$

$$\theta(2\Delta t) \approx \theta(\Delta t) + \frac{v(\Delta t)}{d} \Delta t ; v(2\Delta t) \approx v(\Delta t) - g \sin\theta(\Delta t) \cdot \Delta t$$

osu. osu. [ Eulermetoden ]

## Fysisk pendel

[ YF 14.6 ; LL 9.6 ]



Størt legeme. Masse  $M$ .  
Kan svinge (fiksjonsfritt) om  
akse gjennom A. Tregkets-  
moment  $I$  mhp rot.aksen.

Med ~~A~~ som ref. punkt  
(ref.akse) er CM i  
posisjon  $d$

Bestem svingeperioden  $T$ .

(Anta små utsving,  $|\theta| \ll 1$ )

Ytre krefter:  $M\vec{g}$ , og  $\vec{F}_A =$  kraften fra (75) akslingen på legemet.  $\vec{F}_A$  er ukjent, både abs.verdi og retning. [Med matematisk pendel, s.73, er  $\vec{F}_A$  lik snordraget, rettet langs snora/stanga, og dermed med null komponent normalt på snora/stanga, slik at kun tyngden bidrar langs sirkelbanen. Med fysisk pendel har  $\vec{F}_A$  generelt komponenter både parallelt med  $\vec{d}$  (se fig) og normalt på  $\vec{d}$ .]

Men:  $\vec{F}_A$  har ingen arm relativt akse gjennom A, og dermed ikke noe dreiemoment mhp denne akse.

Da gir N2 for rotasjon (om fast akse gjennom A):

$$\tau = I \ddot{\theta} \quad \text{med} \quad \tau = -d \cdot Mg \cdot \sin \theta$$

[Fortegnet:  $\vec{\tau} = \vec{d} \times M\vec{g}$  er rettet inn i planet, dvs tyngdens dreiemoment gir reduisert vinkelakselerasjon når vinkelen  $\theta$  er ~~negativ~~ positiv, som i figuren.]

$$\Rightarrow -Mgd \sin \theta = I \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} \theta = 0 \quad (|\theta| \ll 1)$$

Dvs: Harmonisk osc. med  $\omega_0^2 = Mgd / I$

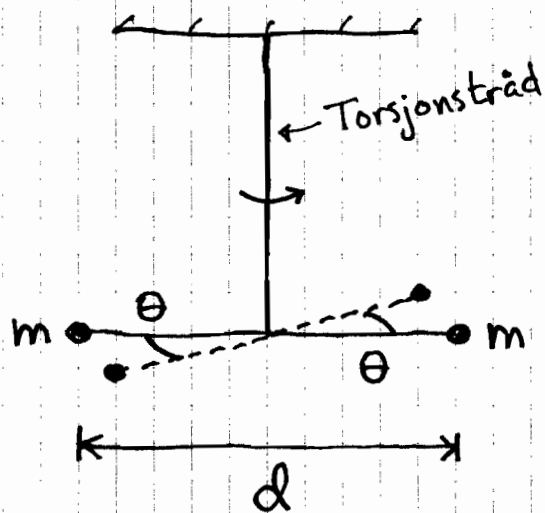
$$\Rightarrow T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{I / Mgd}$$

Steiners sats  $\Rightarrow 2\pi \sqrt{(I_0 + Md^2) / Mgd}$  ( $\rightarrow \infty$  når  $d \rightarrow 0$ , som ventet)

# Torsjionspendel

[YF 14.4 ; LL 9.6]

(76)



Hookes lov:  $|\tau| \sim |\theta|$

Tråden motsetter seg vridning og virker på pendelen [her: stang med lengde  $d$  og to masser  $m$  i hver ende; treghetsmoment  $I = 2 \cdot m \cdot (d/2)^2 = md^2/2$ ] med dreiemoment  $\tau$  prop. med vridningen  $\theta$

$$\Rightarrow \tau = -D \cdot \theta \quad [\text{YF: } \mathcal{H} ; \text{ LL: } \Gamma]$$

$$N2, \text{ rot. om trådens akse: } \tau = I \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -D \cdot \theta = I \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0^2 = D/I$$

$$\Rightarrow \text{Svingeperiode: } T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{I/D}$$

[Lab: Cavendisheksperimentet]

$D$  = torsjonskonstanten / torsjonsstivheten

$$[D] = [1/\tau] = \frac{1}{\text{N} \cdot \text{m}} = \frac{1}{\text{J}}$$

# BØLGER [YF 15, 16, 11.4; LL 10, 7.2]

(77)

Bølge = Forplantning av forstyrrelse fra likevekt

Energi og impuls forplanter seg med bølgen.

Partikler (masse) svinger, men forplanter seg ikke.

Transversale bølger: partikler svinger  $\perp$  forplantn.retningen

Longitudinale  $\text{---} \parallel \text{---}$ :  $\text{---} \parallel \text{---}$   $\parallel$   $\text{---} \parallel \text{---}$

Eksempler:

Bølgetype	Hva svinger?	T eller L?
Bølger på streng	Strengelamenter	T
Bølger i fjær	Fjær $\text{---} \parallel \text{---}$	T eller L
Lydbølger	Molekyler i mediet (gass, væske, fast stoff)	L
Overflatebølger (Grenseflatebølger)	Partikler i/nær grenseflaten (f.eks vann)	T og L: sirkelbevegelse
Elektromagnetiske bølger	Elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetfelt $\vec{B}$	T