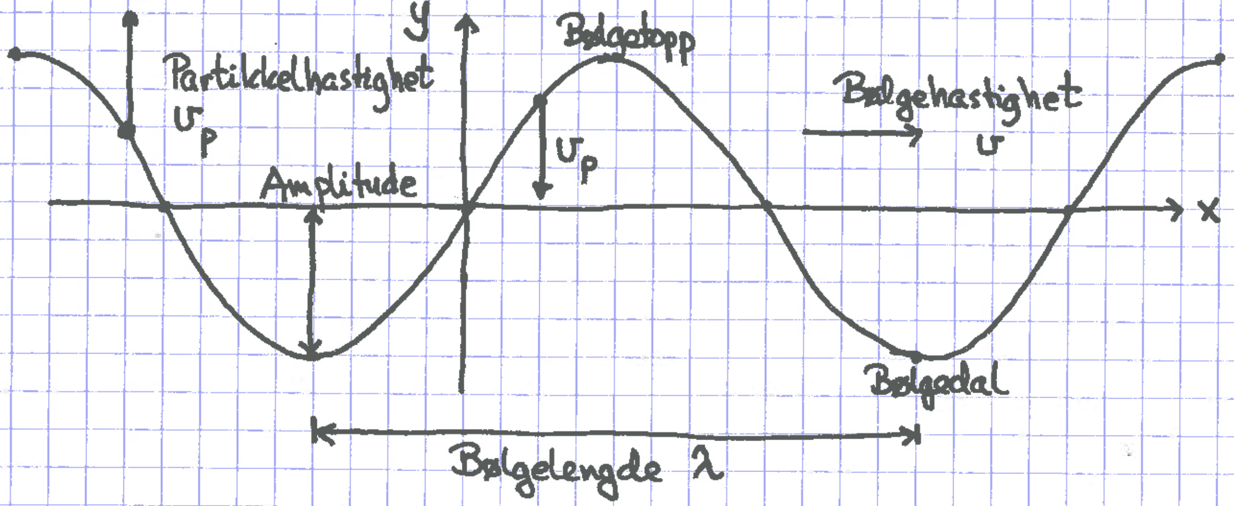
Harmonisk bølge [YF 15.2, 15.3; LL 10.2]

Ser på transversal bølge på (uendelig lang) streng.

$y(x,t)$ = utsving fra likevekt ($y=0$) av strengelement i posisjon x ved tidspunkt t



T = periode = tiden det tar for bølgemønstret å flytte seg en bølgelengde λ

= tiden det tar for et gitt strengelement å utføre en hel svingning

$\Rightarrow$ Bølgehastighet: $v = \lambda / T$ (Kalles også fasehastighet)

f = frekvens = antall svingninger (for gitt strengelement) pr tidsenhet

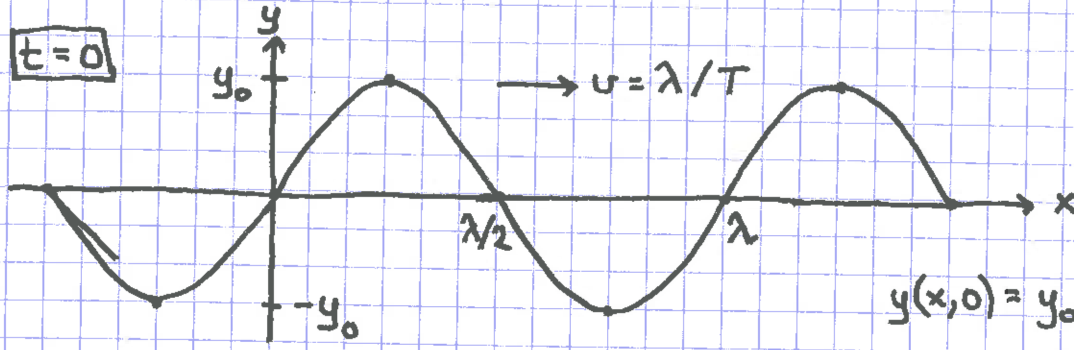
$\Rightarrow f = 1/T$

ω = vinkelfrekvens = bølgens faseendring (for gitt strengelement) pr tidsenhet

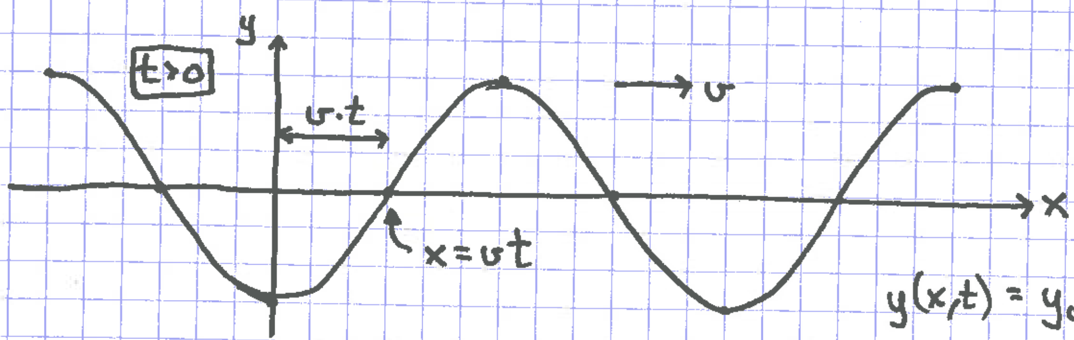
$\Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi / T$ (faseendring 2π pr svingning)

Partikkelhastighet: $v_p = dy/dt$

Matematisk form på $y(x,t)$:



$$y(x,0) = y_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$



$$y(x,t) = y_0 \sin \frac{2\pi(x-vt)}{\lambda}$$

$$v = \lambda/T = \lambda \cdot \omega/2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v = \omega$$

Innfør <u>bølgetallet</u> $k = 2\pi/\lambda$ = bølgens faseendring (for gitt tidspunkt) pr lengdeenhet

$$[k] = m^{-1}$$

Dermed:

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)}$$

Harmonisk bølge som forplanter seg i <u>positiv</u> x-retning med hastighet $v = \lambda/T = \omega/k$

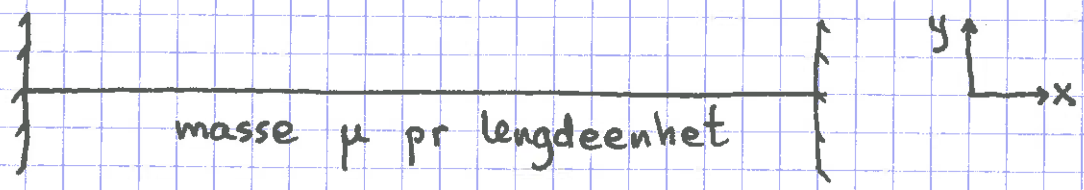
Hvis forplantning i <u>negativ</u> x-retning:

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \sin(kx + \omega t)}$$

Hvis $y(0,0) \neq 0$: $y(x,t) = y_0 \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$; φ = fasekonstant

Transversal bølge på streng [YF 15.4; LL 10.1]

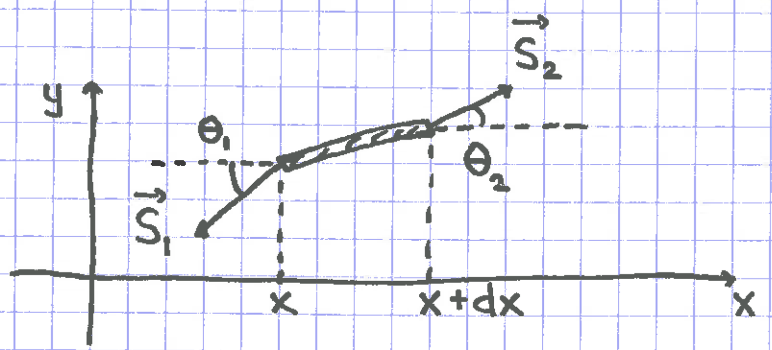
Likevekt: Horisontal streng, utsving $y=0$ overalt, strekk-kraft $S \gg$ strengens tyngde, som neglisjeres.



Bruker N2 til å finne ut hvordan en forstyrrelse fra likevekt forplanter seg langs strengen.

Antagelser: Små utsving; Ingen horisontal bevegelse av masse.

$\Rightarrow$ konstant $S_x = S$ overalt



Strengelement mellom x og $x+dx$, masse $dm = \mu \cdot dx$

N2: $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = dm \cdot \vec{a}$

Horisontalt: $-S_1 \cos\theta_1 + S_2 \cos\theta_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad S_1 \cos\theta_1 = S_2 \cos\theta_2 = S_x = S$$

Vertikalt: $S_2 \sin\theta_2 - S_1 \sin\theta_1 = dm \cdot \ddot{y}$

Divisjon med hhv $S = S_2 \cos\theta_2$, $S = S_1 \cos\theta_1$ og S gir

$$\tan\theta_2 - \tan\theta_1 = \mu \cdot dx \cdot \ddot{y} / S$$

Vi ser at $\tan\Theta = dy/dx$ (= strengens "helning") 81

Partiell derivasjon

Her avhenger utsvinget y av to variable, x og t.
Da kan vi spørre om ulike ting:

1) Hvordan endres y hvis vi endrer posisjonen fra x til $x+dx$, med tiden t holdt konstant?
2) Hvordan endres y hvis tiden endres fra t til $t+dt$, med posisjonen x holdt konstant?

Svar på 1) er selvsagt $dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx$, der dy/dx er den deriverte av y mhp x, og som sagt, med variabel nr to, tiden t, holdt konstant.
Nærmest som en påminnelse om at <u>andre</u> variable (enn x) skal betraktes som konstanter (her: t), bruker vi notasjonen

$$\frac{\partial y}{\partial x} \overset{\text{def}}{=} \text{derivert av } y \text{ mhp } x\text{; andre variable holdes konstant}$$

Vi kaller $\partial y/\partial x$ for den <u>partiellderiverte</u> av y mhp x.

Tilsvarende: Svar på 2) er $dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt$, med dy/dt lik den deriverte av y mhp t, med x holdt konstant.
Vi skriver $\partial y/\partial t$ og kaller dette for den <u>partiellderiverte</u> av y mhp t.

Eks: Hvis $y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$, blir

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k y_0 \cos(kx - \omega t) \quad \text{og} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_0 \cos(kx - \omega t)$$

For strengen : $\tan\theta = \partial y/\partial x$

$\ddot{y} = \partial^2 y/\partial t^2$

Dermed:

$$\frac{(\partial y/\partial x)_{x+dx} - (\partial y/\partial x)_x}{dx} = \frac{\mu}{S}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Her er, pr def., venstre side lik den deriverte av $\partial y/\partial x$ mhp x, med andre ord lik $\partial^2 y/\partial x^2$.

Dermed:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

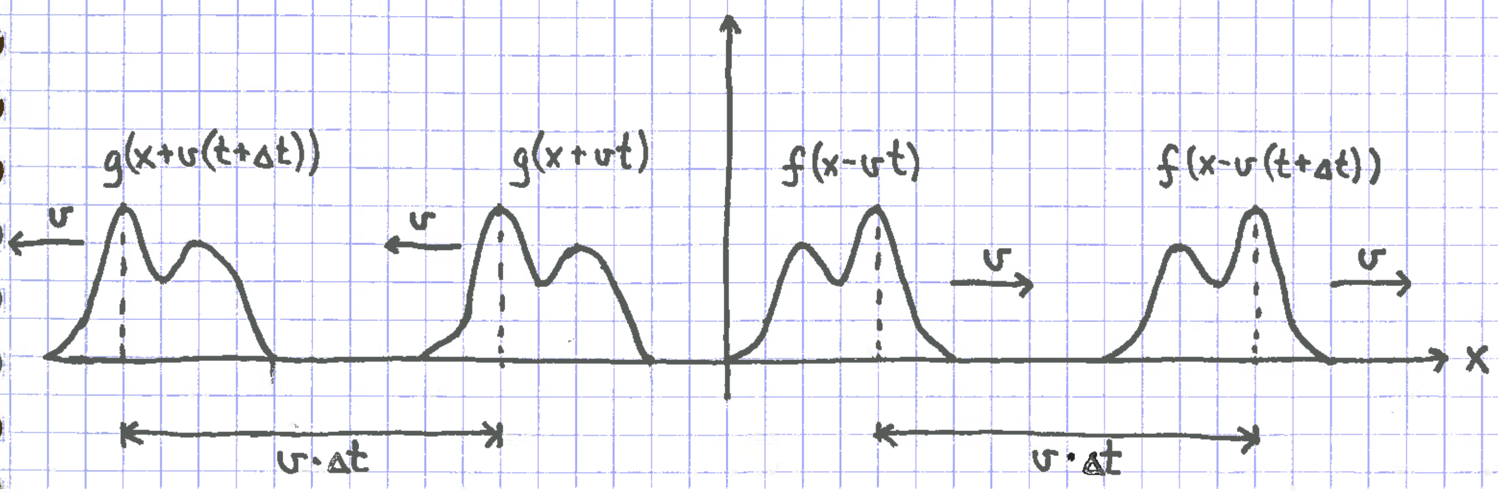
Bølgeligning for transv. utsving $y(x,t)$ på streng med strekk-kraft S og masse μ pr lengdeenhet.

[Lineær 2.ordens partiell diff. ligning]

Generell løsning: $\boxed{y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)}$

[Her er f og g vilkårlige kontinuerlige og to ganger deriverbare funksjoner.]

Her er $f(x-vt)$ og $g(x+vt)$ bølger (forstyrrelser fra likevekt) som forplanter seg i hhv positiv og negativ x-retning:



La oss vise at $f(x-vt)$ og $g(x+vt)$ [og dermed også summen av disse; superposisjonsprinsippet] er løsninger av bølgeligningen. Innfør $z = x - vt$ og bruk kjerneregelen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\cdot 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\cdot(-v)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial z}\cdot(-v) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}\cdot(-v)\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot v^2$$

Dermed: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, som var det vi skulle vise.

Tilsvarende, med $z = x + vt$ og kjerneregelen:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\ ; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\ ; \ \text{OK.}$$

N2 for strengelementet gav $\partial^2 y/\partial x^2 = (\mu/S)\,\partial^2 y/\partial t^2$, som dermed har generell løsning

$$y(x,t) = y_1(x-vt) + y_2(x+vt)$$

med bølgehastighet $v = \sqrt{S/\mu}$

Eks: $M = 0.776$ kg, $L = 8$ m og $S = 18$ N $\Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{S}{M/L}} = \underline{13.4 \text{ m/s}}$

Elastisitet [YF 11.4; LL 7.2] $\boxed{16.10.14}$

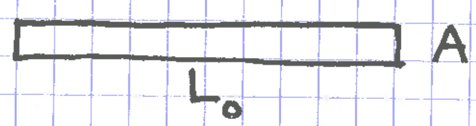
Hookes lov (lineær respons):

Resulterende deformasjon (relativ lengde- eller volumendring) er proporsjonal med mekanisk spenning (kraft pr flateenhet).

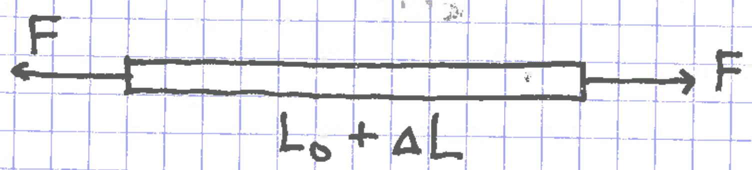
Elastisk modul $\overset{\text{def.}}{=}$ $\dfrac{\text{Mekanisk spenning}}{\text{Relativ deformasjon}}$ $\left(\dfrac{\text{Stress}}{\text{Strain}}\right)$

Strekk / sammenpressing av tynn stang:

Likevekt:



Strukket:



Hookes lov:

$$E = \frac{F/A}{\Delta L / L_0} = \text{elastisitetsmodulen} \quad (\text{Evt: Youngs modul } Y)$$

$$[E] = N/m^2 = Pa \quad (\text{pascal})$$

Som ideell fjær, med fjærkonstant

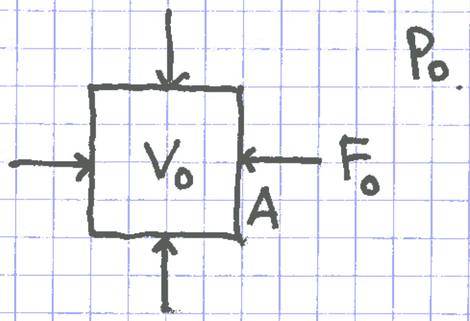
$$k = F/\Delta L = E \cdot A / L_0$$

Eks: Stål, $E \approx 200$ GPa

Grafen, $E \approx 1050$ GPa

Volumkompressibilitet:

Likevekt:

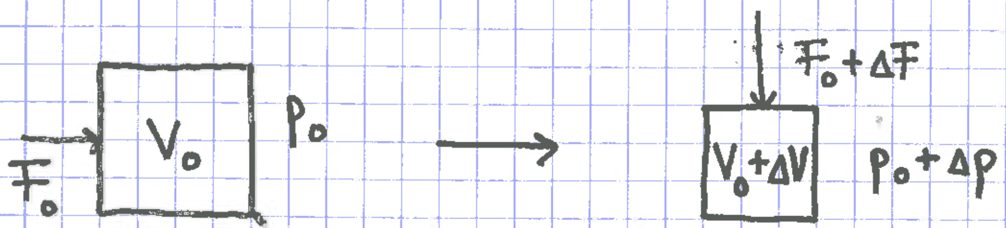


Likevektstrykk: $p_0 = F_0/A$; <u>isotropt</u> i et fluid

$\Rightarrow \vec{F}_0$ står normalt på flaten A

($\vec{F}_0$ = netto kraft på A fra omgivende medium)

Trykkøkning $\Rightarrow$ Volumreduksjon:



$\Delta p > 0$
$\Downarrow$
$\Delta V < 0$

Hookes lov: $$B = -\frac{\Delta F/A}{\Delta V/V_0} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0}$$

= bulkmodulen (B^{-1} = kompressibiliteten)

$$[B] = N/m^2 = Pa$$

Eks: Stål, $B \approx 160$ GPa

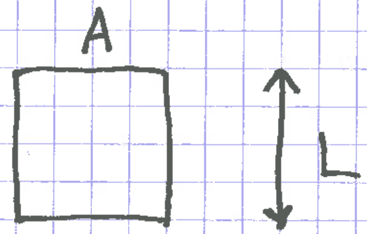
Vann, $B \approx 2$ GPa

Luft, $B \approx 10^{-4}$ GPa

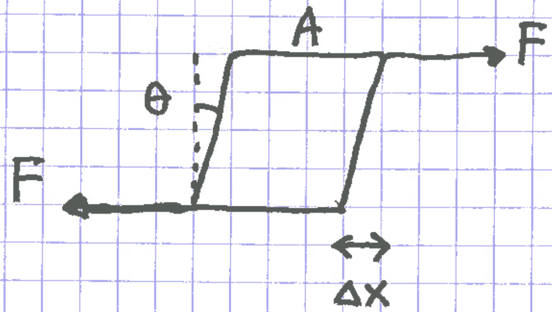
$\Rightarrow B_{gass} \ll B_{væske} < B_{fast\ stoff}$

Skjærmodul:

Likevekt:



Med skjærkrefter:



Hookes lov: $G = \dfrac{F/A}{\Delta x/L} = \dfrac{F/A}{\tan\theta}$

G = skjærmodulen ; $[G] = \text{Pa}$

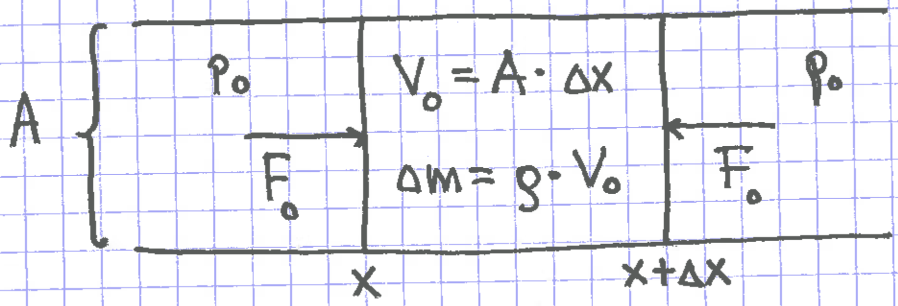
Eks: Stål, $G \approx 80$ GPa

$\Rightarrow E \sim B > G$ (for de fleste faste stoffer)

Longitudinale mekaniske bølger. Lyd

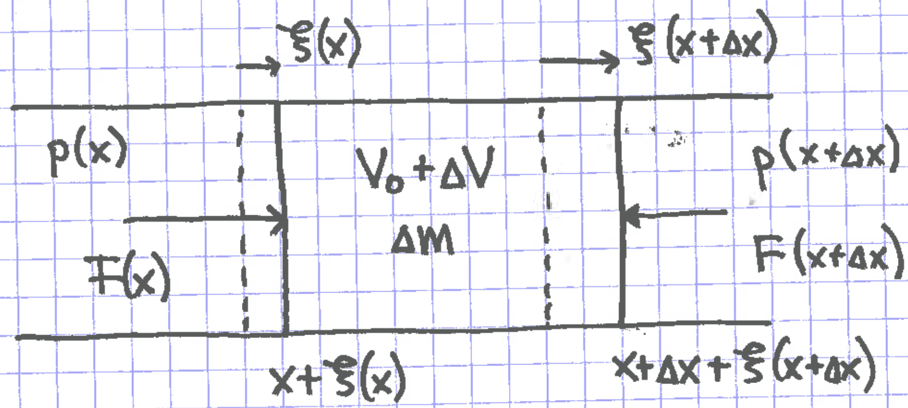
[YF 16.1, 16.2; LL 10.6]

Ser på rør fylt med fluid (gass eller væske):



Likevekt
($\rho = \Delta m / V_0$ = massetetthet)

Forstyrrelse fra likevekt:



$$p(x) = p_0 + \Delta p(x), \qquad p(x+\Delta x) = p_0 + \Delta p(x+\Delta x)$$

$$\Delta V = [\xi(x+\Delta x) - \xi(x)] \cdot A = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot A$$

$$\Delta p(x) = \frac{F(x) - F_0}{A} \quad ; \quad \Delta p(x+\Delta x) = \frac{F(x+\Delta x) - F_0}{A}$$

$\Rightarrow$ Netto kraft på Δm: $F(x) - F(x+\Delta x) = [\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x)] \cdot A$

Fra s. 85: $\Delta p = -B \cdot \Delta V / V_0$

$$\Rightarrow \Delta p(x) = -B \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x \cdot \Delta x \cdot A \,/\, \Delta x \cdot A = -B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x$$

Bruker N2 på Δm:

$$\Delta m \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x) - F(x+\Delta x)$$

$$= [\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x)] \cdot A$$

$$= -B\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}\right] \cdot A$$

$$= +B \cdot \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) \cdot \Delta x \cdot A$$

$$\Delta m = \rho V_0 = \rho A \, \Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Dvs: Utsvinget $\xi(x,t)$ fra likevekt oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

med bølgehastighet $v = \sqrt{B/\rho}$

Eks:

Luft: $v = \sqrt{\frac{1.42 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1.29 \text{ kg/m}^3}} = 332 \text{ m/s}$

Vann: $v = \sqrt{\frac{2.2 \cdot 10^9 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg/m}^3}} = 1483 \text{ m/s}$

Stål: $v = \sqrt{\frac{B + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{(160 + \frac{4}{3} \cdot 80) \text{GPa}}{7800 \text{ kg/m}^3}} = 5847 \text{ m/s}$

Med tynn stang (av fast stoff):

E erstatter B $\Rightarrow$ $v = \sqrt{E/\rho}$

Seismiske bølger:

Jordskjelv, vulkanutbrudd osv. genererer både transv. og longit. bølger i jordskorpa og jordas indre, hhvis såkalte S-bølger (sekundære) og P-bølger (primære).

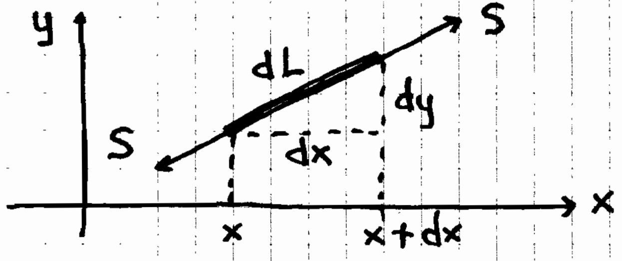
$v_S = \sqrt{G/\rho}$, $v_P = \sqrt{(B + 4G/3)/\rho} > v_S$

$\Rightarrow$ P-bølgene ankommer før S-bølgene ved jordskjelv

Kan bestemme både posisjon og styrke ved kombinert studium av P- og S-bølgene.

Energi ved bølgeforplantning [YF 15.5; LL 10.5]

Ser på transversal bølge på streng:



Strengelement, lengde dL, masse $dm = \mu \cdot dx$, strekk-kraft S.

Kin. energi: $dK = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2} \mu \, dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

Pot. energi: $dU = S \cdot \underbrace{(dL - dx)}_{= \text{forlengelsen}}$

$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \left\{1 + (dy/dx)^2\right\}^{1/2}$

For små $|\alpha|$ er $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha$

$\Rightarrow dL \approx dx \cdot \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\} \Rightarrow dL - dx \approx \frac{1}{2} dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

$\Rightarrow dU \approx \frac{1}{2} S \, dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

$\Rightarrow$ Mek. energi pr lengdeenhet blir:

$$\varepsilon = \frac{dE}{dx} = \frac{dK}{dx} + \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Vi har $y(x,t) = y(x \pm vt)$, og dermed $\frac{\partial y}{\partial t} = \pm v \frac{\partial y}{\partial x}$.

Videre er $S = \mu \cdot v^2$. Dermed:

$$\varepsilon = \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \pm \mu v \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$[\varepsilon] = J/m$