Hvis y avhenger av $x \pm vt$, må også $\partial y/\partial t$ og $\partial y/\partial x$ avhenge av $x \pm vt$.

Dvs: $\varepsilon(x,t) = \varepsilon(x \pm vt)$

Da oppfyller energitettheten bølgeligningen,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2},$$

og <u>energien forplanter seg med hastighet v</u> i bølgens forplantningsretning.

Med plan longitudinal bølge (lydbølge):

$1D \to 3D$; $\mu \to \rho$ = masse pr volumenhet;

$\varepsilon = dE/dx \to dE/dV$ = energi pr volumenhet;

$y \to \xi$ = molekylenes midlere utsving fra likevekt

$v = \sqrt{S/\mu} \to v = \sqrt{B/\rho}$

$$\Rightarrow \varepsilon(x,t) = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \pm \rho v \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$[\varepsilon] = J/m^3$

Eks: Harmonisk bølge

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \omega = \frac{2\pi}{T},\ v = \frac{\omega}{k}$$

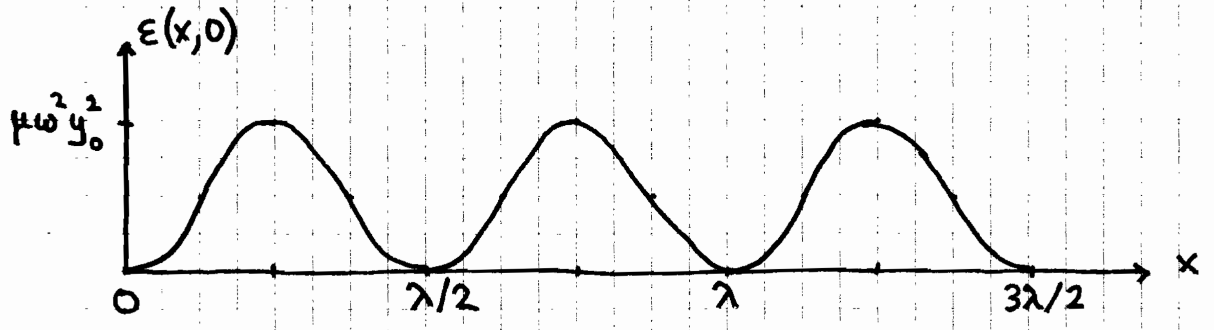
$$\partial y/\partial x = -k\, y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$\Rightarrow$

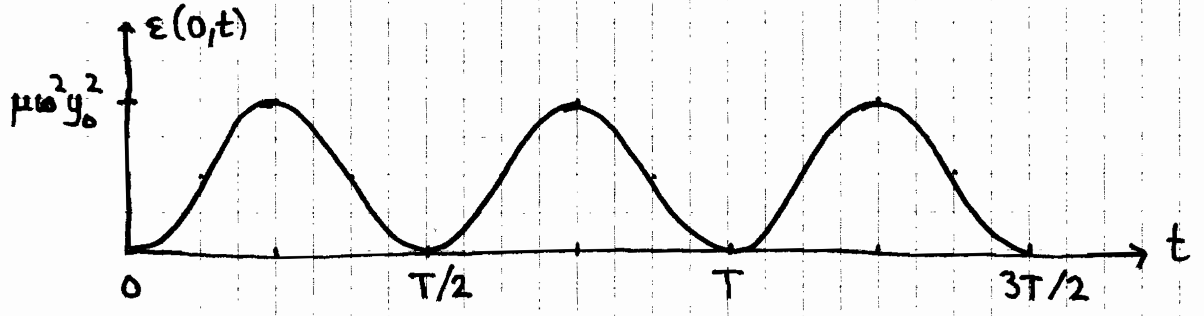
$$\varepsilon(x,t) = \mu v^2 k^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \left\{ 1 - \cos[2kx - 2\omega t] \right\}$$

Øyeblikksbilde ved $t = 0$: $\varepsilon(x,0) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{\lambda} x\right)$



Svingning av ε ved fast posisjon $x = 0$: $\varepsilon(0,t) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{T} t\right)$



Midlere energitetthet

For harmonisk bølge ser vi umiddelbart fra figurene over at $\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2$. Her angir $\bar{\varepsilon}$ en romlig middelverdi og $\langle \varepsilon \rangle$ et tidsmiddel.

Generelt, for periodisk oppførsel med romlig periode λ og tidsperiode T:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dx$$

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\int_0^T \varepsilon(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(x,t)\,dt$$

Med harmonisk bølge er $\varepsilon(x,t) \sim \sin^2(kx-\omega t)$, eventuelt $\varepsilon(x,t) \sim 1 - \cos(2kx-2\omega t)$. Siden $\cos(2kx-2\omega t)$ svinger mellom -1 og $+1$, blir middelverdien null, enten vi midler i rom eller tid.

Alternativt: Siden $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, og $\langle\sin^2\varphi\rangle = \langle\cos^2\varphi\rangle$, følger at middelverdien av $\sin^2(kx-\omega t)$ er lik $1/2$, enten vi midler i rom eller tid.

Følgelig:
$$\bar{\varepsilon} = \langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 y_0^2$$

Tilsvarende, for plan harmonisk lydbølge:

$$\bar{\varepsilon} = \langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 \xi_0^2$$

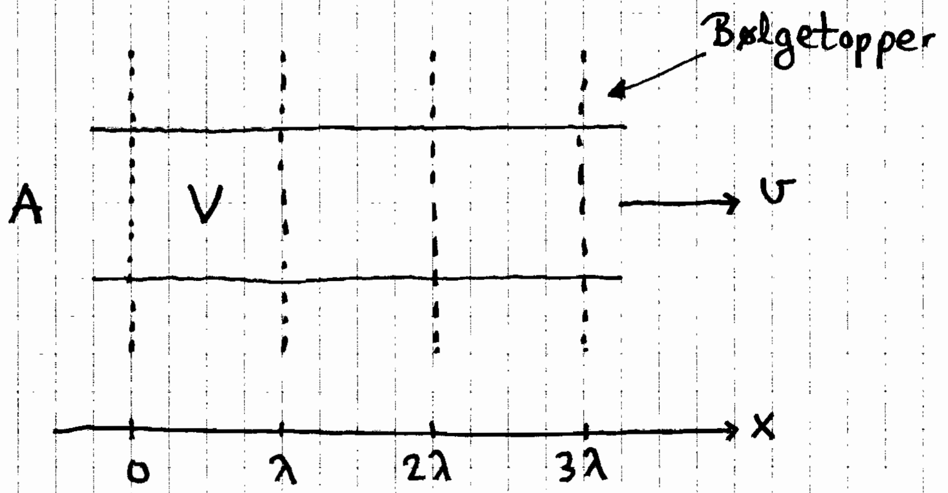
Bølgens intensitet I [YF 16.3 ; LL 10.5]

I = overført energi pr tidsenhet og pr flateenhet

= overført effekt pr flateenhet

$[I] = J/s\cdot m^2 = W/m^2$

Med plan harmonisk lydbølge:



Energi i volum $V = A\cdot\lambda$ mellom $x=0$ og $x=\lambda$:

$$\bar{\varepsilon}\cdot A\cdot\lambda$$

Denne energien passerer flaten med areal A ved $x=\lambda$ i løpet av tiden T. Dermed:

$$I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{\varepsilon} A \lambda / T}{A} = \underline{\underline{\bar{\varepsilon}\cdot v}} \qquad (v = \lambda/T)$$

Desibelskalaen

Knapt hørbar lyd: $I = I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$; velges som standard referanse

Smertegrensen: $I = 1\ W/m^2$

Dvs: Stort spenn; hensiktsmessig med logaritmisk skala:

$$\boxed{\beta = \#\,dB \overset{def}{=} 10 \log \frac{I}{I_0}} \qquad \text{(Lydtrykksnivå)}$$

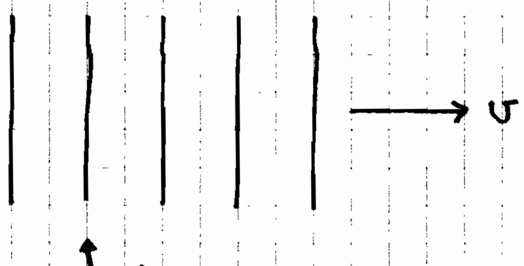
Høregrensen: $10 \log (I_0/I_0) = 0\ dB$

Normal samtale: $10 \log (10^{-6}/10^{-12}) = 10 \cdot 6 = 60\ dB$

Smertegrensen: $10 \log (1/10^{-12}) = 10 \cdot 12 = 120\ dB$

Bølgeforplantning i vilkårlig retning

Plan harmonisk lydbølge, forpl. i x-retning:



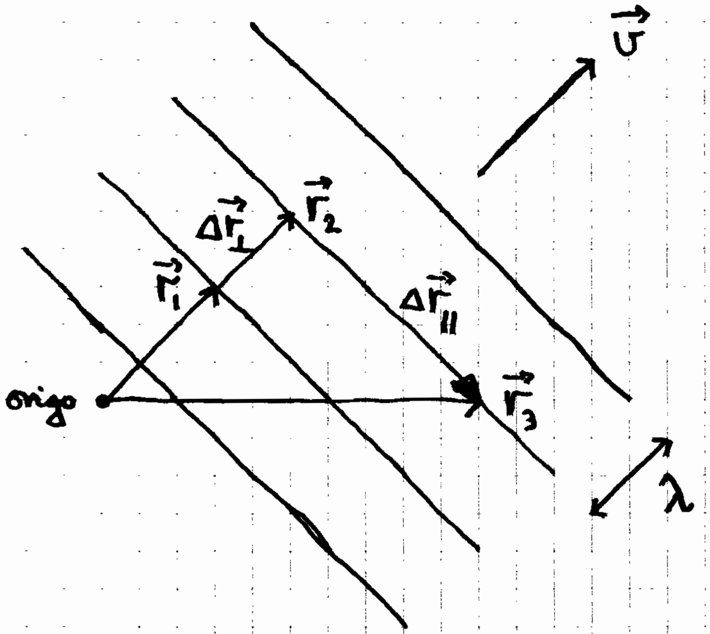
$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi/T, \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

$\boxed{\text{Bølgefront = Flate med konstant fase}}$ (For et gitt tidspunkt t)

Her: Plan $\perp$ x-aksen

Plan harmonisk bølge i vilkårlig retning:



$$\vec{\xi}(\vec{r},t) = \vec{\xi}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

Longitudinal bølge: $\vec{\xi} \parallel \vec{v}$

Transversal —"—: $\vec{\xi} \perp \vec{v}$

Anta f.eks. $t = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\xi}(\vec{r},0) = \vec{\xi}_0 \sin \vec{k}\cdot\vec{r}$

Må ha lik fase i $\vec{r}_2$ og $\vec{r}_3$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r}_2 = \vec{k}\cdot\vec{r}_3 \quad \Rightarrow \vec{k}\cdot(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = 0 \quad \Rightarrow \vec{k}\cdot\Delta\vec{r}_\parallel = 0$$

$$\Rightarrow \vec{k} \perp \Delta\vec{r}_\parallel \quad \Rightarrow \vec{k} \parallel \vec{v}$$

Dvs: $\boxed{\text{Bølgetallsvektoren } \vec{k} \text{ peker i bølgens forpl. retning.}}$

Må ha faseforskjell 2π mellom $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r}_2 = \vec{k}\cdot\vec{r}_1 + 2\pi \quad \Rightarrow \vec{k}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 2\pi$$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\Delta\vec{r}_\perp = 2\pi \quad \Rightarrow \underbrace{k}_{|\vec{k}|}\cdot\underbrace{\lambda}_{|\Delta\vec{r}_\perp|} = 2\pi \quad \Rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

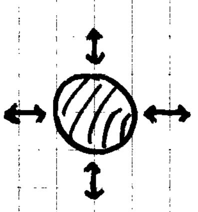
Dvs: $\boxed{\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{v}}$

$$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$$

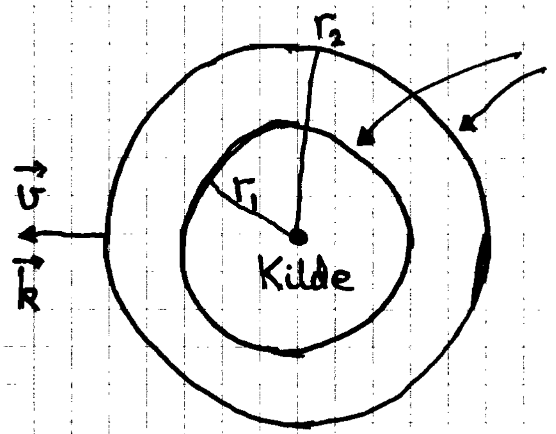
$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\lambda = 2\pi / k$$

Kulebølger



Kulesymmetrisk bølgekilde $\Rightarrow$ Bølge som forpl. seg med lik intensitet i alle retninger



Kuleformede bølgefronter som forpl. seg radielt bort fra kilden; areal $4\pi r^2$.

Pga energibevarelse må like mye energi E_1 passere kuleflaten med $r = r_1$, som energien E_2 som passerer kuleflaten med $r = r_2$.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle \quad \text{(midlere effekt)}$$

$$\Rightarrow 4\pi r_1^2 \cdot I_1 = 4\pi r_2^2 \cdot I_2 \qquad (I = \langle P \rangle / A)$$

$$\Rightarrow I_2 / I_1 = r_1^2 / r_2^2$$

Dvs: $\boxed{I(r) \sim 1/r^2 \quad \text{for kulebølger}}$

Sylindersymmetrisk bølgekilde $\Rightarrow$ Sylinderformede bølgefronter med omkrets $2\pi r$, dvs areal A prop. med avstanden r fra kilden $\Rightarrow$ $\boxed{I(r) \sim 1/r \quad \text{for sylinderbølger}}$

Plan bølgekilde $\Rightarrow$ Plane bølgefronter med konstant areal A uavh. av avstanden fra kilden

$$\Rightarrow \boxed{I = \text{konst.} \quad \text{for plane bølger}}$$