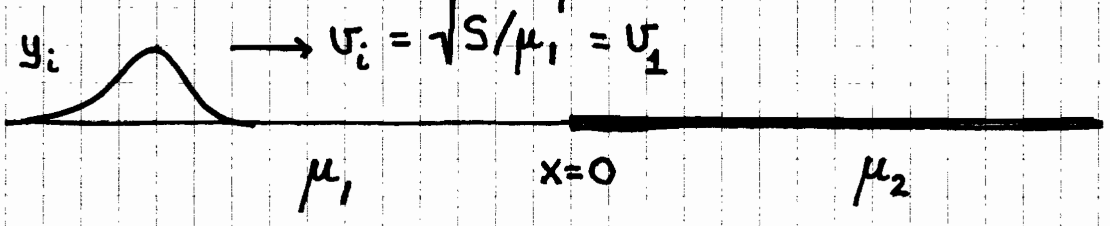
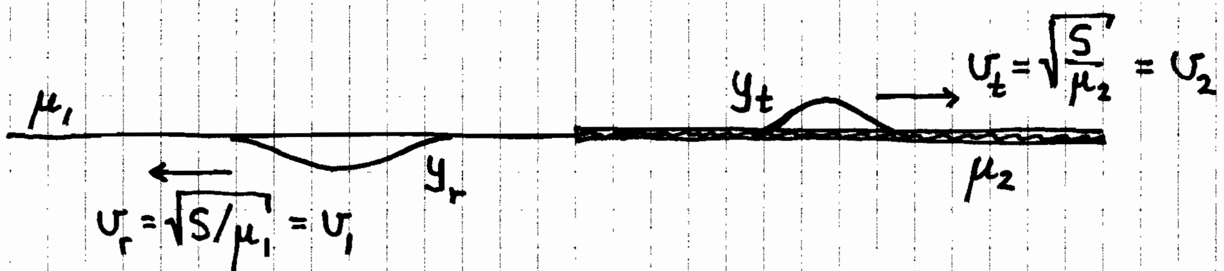
Refleksjon og transmisjon av bølge på streng

[YF 15.7 ; LL 10.3]

Bølge $y_i(x,t)$ inn mot skjøt i $x = 0$:



Blir delvis reflektert og transmittert i skjøten:



Fysiske betingelser:

y og $\partial y/\partial x$ kontinuerlige (også $\partial y/\partial t$ kontinuerlig)

$\overline{P}_i = \overline{P}_r + \overline{P}_t$ (energibevarelse; $\overline{P}$ = midlere effekt)

$$y(x,t) = \begin{cases} y_i(x,t) + y_r(x,t) & \text{for } x < 0 \\ y_t(x,t) & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

Anta harmonisk bølge:

$$y_i(x,t) = y_{i0} \sin(k_1 x - \omega t)$$
$$y_r(x,t) = y_{r0} \sin(k_1 x + \omega t)$$
$$y_t(x,t) = y_{t0} \sin(k_2 x - \omega t)$$

$$y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t) \qquad [\text{kont. } y]$$

$$\Rightarrow \quad y_{io}\sin(-\omega t) + y_{ro}\sin(\omega t) = y_{to}\sin(-\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad y_{io} - y_{ro} = y_{to}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(y_i(x,t) + y_r(x,t)\right)\right\}_{x=0} = \left\{\frac{\partial}{\partial x} y_t(x,t)\right\}_{x=0} \qquad \left[\text{kont. } \frac{\partial y}{\partial x}\right]$$

$$\Rightarrow \quad k_1 y_{io}\cos(-\omega t) + k_1 y_{ro}\cos(\omega t) = k_2 y_{to}\cos(-\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad k_1 y_{io} + k_1 y_{ro} = k_2 y_{to}$$

$$\Rightarrow \quad y_{ro} = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}\, y_{io} \quad ; \quad y_{to} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}\, y_{io}$$

Alternativt, siden $k = \omega / v = \frac{\omega}{\sqrt{S}} \cdot \sqrt{\mu}$:

$$\boxed{y_{ro} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\, y_{io} \quad ; \quad y_{to} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\, y_{io}}$$

- $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow y_{ro} = 0,\ y_{to} = y_{io}$; OK
- $\mu_2 > \mu_1 \Rightarrow y_{ro}/y_{io} > 0 \Rightarrow y_r$ og y_i har <u>motsatt fortegn</u> nær $x = 0$
- $\mu_2 < \mu_1 \Rightarrow y_r$ og y_i <u>likt fortegn</u> nær $x = 0$ $[y_{to}/y_{io} > 0$ alltid$]$
- $\mu_2 \to \infty \Rightarrow y_{ro} = y_{io},\ y_{to} = 0 \Rightarrow y(0,t) = 0$; OK (Vegg)
- $\mu_2 \to 0 \Rightarrow y_{ro} = -y_{io},\ y_{to} = 2y_{io} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2}\mu_2\omega^2 y_{to}^2 \to 0,$

  $\bar{\varepsilon}_r = \bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{2}\mu_1\omega^2 y_{io}^2$; hele bølgen reflekteres

Transmisjonskoeffisient:

$T = \bar{P}_t / \bar{P}_i$ = andel av innkommende effekt som transmitteres

Refleksjonskoeffisient:

$R = \bar{P}_r / \bar{P}_i$ = andel effekt som reflekteres

$$\bar{P} = \frac{\bar{\varepsilon}\cdot\lambda}{T} = \bar{\varepsilon}\cdot v = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_0^2 \cdot v \qquad \text{(se s. 93, 94)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{P}_t}{\bar{P}_i} = \frac{\mu_2\, y_{t0}^2\, v_2}{\mu_1\, y_{i0}^2\, v_1} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\cdot\left(\frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}+\sqrt{\mu_1}}\right)^2 = \frac{4\sqrt{\mu_1\mu_2}}{(\sqrt{\mu_2}+\sqrt{\mu_1})^2}$$

$$R = \frac{\bar{P}_r}{\bar{P}_i} = \frac{y_{r0}^2}{y_{i0}^2} = \left(\frac{\sqrt{\mu_2}-\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}+\sqrt{\mu_1}}\right)^2$$

Energibevarelse $\Rightarrow$ $\boxed{T + R = 1}$ (Sjekk selv)

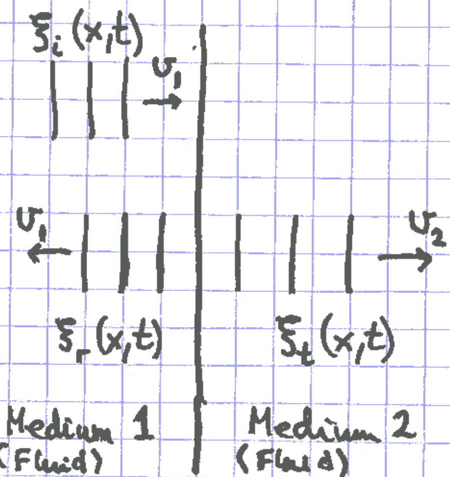
For plan harmonisk lydbølge med normalt innfall mot grenseflate mellom to ulike medier (fluider!):

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\cdot\sqrt{\varrho/B} \Rightarrow \xi_{r0} = \frac{\sqrt{\varrho_2 B_2} - \sqrt{\varrho_1 B_1}}{\sqrt{\varrho_2 B_2} + \sqrt{\varrho_1 B_1}}\,\xi_{i0} \;;$$

$$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\varrho_1 B_1}}{\sqrt{\varrho_2 B_2}+\sqrt{\varrho_1 B_1}}\,\xi_{i0} \quad \left[\text{Fordi } B\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} \text{ er kontinuerlig i } x=0;\ \text{s. 88}\right]$$

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{P}_t}{\bar{P}_i} = \ldots\ldots = \frac{4\sqrt{\varrho_1 B_1 \varrho_2 B_2}}{(\sqrt{\varrho_2 B_2}+\sqrt{\varrho_1 B_1})^2}$$

$$R = \frac{\bar{P}_r}{\bar{P}_i} = \ldots\ldots = \left(\frac{\sqrt{\varrho_2 B_2}-\sqrt{\varrho_1 B_1}}{\sqrt{\varrho_2 B_2}+\sqrt{\varrho_1 B_1}}\right)^2$$



Eksempler

Eks 1: Hvor mange dB faller lydtrykksnivået i en kulebølge ved en dobling av avstanden til kilden?

Løsn 1: $I(2r)/I(r) = (r/2r)^2 = 1/4$

$$\beta(2r) - \beta(r) = 10 \log \frac{I(2r)}{I_0} - 10 \log \frac{I(r)}{I_0} = 10 \log \frac{I(2r)}{I(r)}$$

$$= 10 \log\left(\tfrac{1}{4}\right) = -10 \log 4 \approx \underline{\underline{-6\,\mathrm{dB}}}$$

[Hvis sylinderbølge: $\frac{I(2r)}{I(r)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta(2r) - \beta(r) = -10 \log 2 = -3\,\mathrm{dB}$]

Eks 2: Hvor stor andel av energien reflekteres ved normalt innfall av en plan harmonisk lydbølge mot en vannoverflate?

Løsn 2: Luft, $\sqrt{\rho_1 B_1} = \sqrt{1.29 \cdot 1.42 \cdot 10^5} = 428 \quad (\mathrm{kg}/\mathrm{m}^2\mathrm{s})$

Vann, $\sqrt{\rho_2 B_2} = \sqrt{10^3 \cdot 2.2 \cdot 10^9} = 1.483 \cdot 10^6 \quad (-"-)$

$\Rightarrow R = 0.9988 \approx \underline{\underline{99.9\,\%}}$

Eks 3: Som eks. 2, men med tynne stenger av aluminium og stål; R = ?

Løsn 3: Stål, $\sqrt{\rho_2 E_2} = \sqrt{7800 \cdot 200 \cdot 10^9} = 3.95 \cdot 10^7$

Al, $\sqrt{\rho_1 E_1} = \sqrt{2700 \cdot 70 \cdot 10^9} = 1.37 \cdot 10^7$

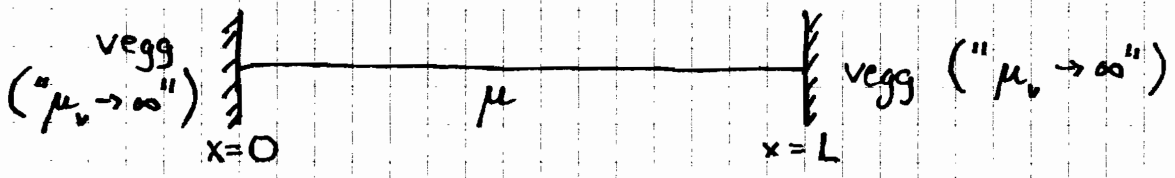
$\Rightarrow R = \left[(3.95 - 1.37)/(3.95 + 1.37)\right]^2 = 0.235 \approx 24\,\%$

[Dvs: $R \approx 1$ hvis svært "ulike" medier;

liten R hvis ganske "like" medier]

Stående bølger [YF 15.7, 15.8, 16.4; LL 10.3]

Ser på streng, lengde L, strekk-kraft S, masse μ pr lengdeenhet; fastspent i begge ender ($x = 0$ og $x = L$):



Ren harmonisk bølge på strengen ($y_{r0} = y_{i0} = y_0$; se s. 99):

$$y(x,t) = y_0 \{ \sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) \} \qquad (\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b)$$

$$= y_0 \{ \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t \}$$

$$= 2 y_0 \sin kx \cdot \cos \omega t$$

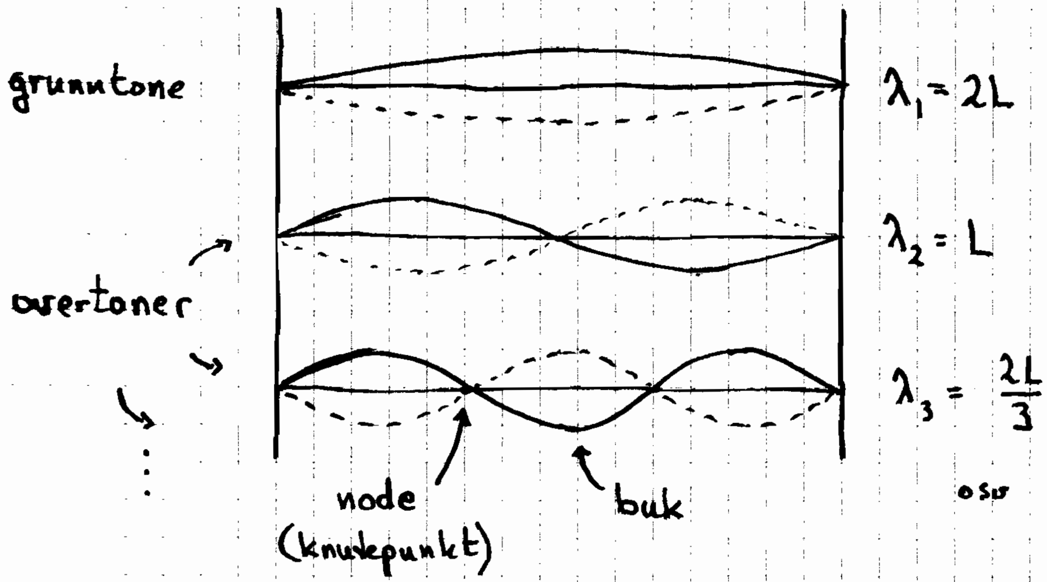
Dvs: Svingning med posisjonsavhengig amplitude $2 y_0 \sin kx$, kalles en <u>stående bølge</u>.

Mulige bølgelengder og frekvenser:

$$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

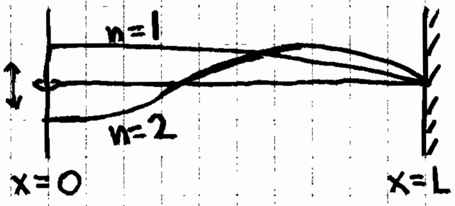
$$\Rightarrow \boxed{f_n = v/\lambda_n = \sqrt{S/\mu} \cdot n/2L}$$

[Strengeinstrumenter!]



Streng med en fri ende ($y_{r0} = -y_{i0} = -y_0$; se s 99):

$$y(x,t) = y_0 \{\sin(kx-\omega t) - \sin(kx+\omega t)\} = -2y_0 \cos kx \cdot \sin \omega t$$



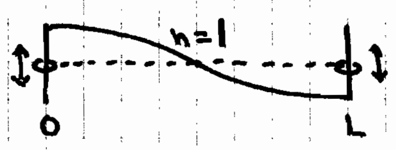
$\cos kL = 0 \Rightarrow kL = (n - \tfrac{1}{2})\pi \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}}$

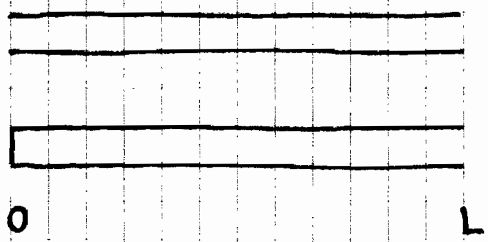
Max amplitude (buk), $2y_0$, i fri ende.

$$\boxed{f_n = v/\lambda_n = \sqrt{S/\mu} \cdot (2n-1)/4L}$$

To frie ender gir $\lambda_n = 2L/n$:



Tilsvarende prinsipp for blåseinstrumenter:



Tynt rør, åpne ender

—"—, en lukket ende

Null longitudinalt utsving fra likevekt ved lukket ende, max utsvingsamplitude ved åpen ende

$\Rightarrow$ For to åpne eller lukkede ender: $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, $f_n = \frac{\sqrt{B/\varrho} \cdot n}{2L}$

For en åpen og en lukket ende: $\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$, $f_n = \frac{\sqrt{B/\varrho} \cdot (2n-1)}{4L}$

$\Big\}$ $n = 1, 2, \ldots$

Trykkbølgen (nederst s. 87): $\Delta p(x,t) = -B\, \partial\xi/\partial x$

$\Rightarrow$ Buk for Δp der utsvingsbølgen ξ har node, og omvendt

---

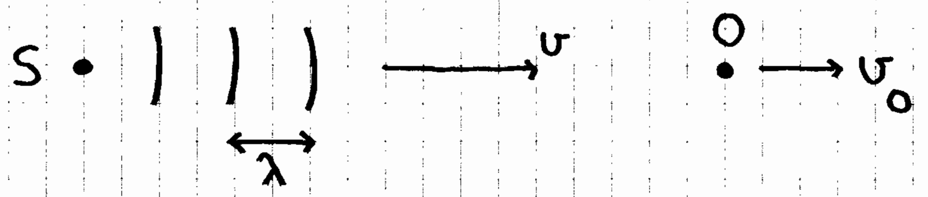
Eks: C-streng på cello, $L = 695$ mm, $\mu = 18.2$ g/m, $S = 150.4$ N

$\Rightarrow f_n = \sqrt{150.4/18.2 \cdot 10^{-3}} \cdot n / 2 \cdot 0.695$ Hz $= 65.4$ Hz, 130.8 Hz, ...

grunntone   1. overtone

Dopplereffekten [YF 16.8 ; LL 10.8]

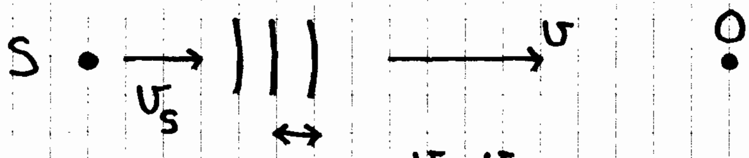
Lydkilde S og observatør O i relativ bevegelse (Langs forbindelseslinjen S – O) ⇒ Observert frekvens $f_O \neq$ utsendt frekvens f_S

1) 

Bølgefart relativt O : $v - v_O$

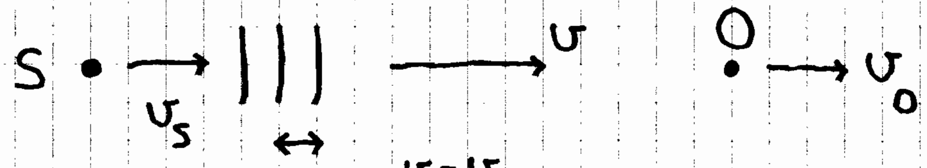
⇒ Frekvens målt av O : $f_O = \dfrac{v - v_O}{\lambda} = \dfrac{v - v_O}{v} \cdot f_S$

Dvs : $f_O < f_S$ hvis $v_O > 0$, og omvendt

2) 

$$\lambda = \frac{v - v_S}{f_S}$$

Frekvens målt av O : $f_O = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{v}{v - v_S} \cdot f_S$

3) 

$$\lambda = \frac{v - v_S}{f_S}$$

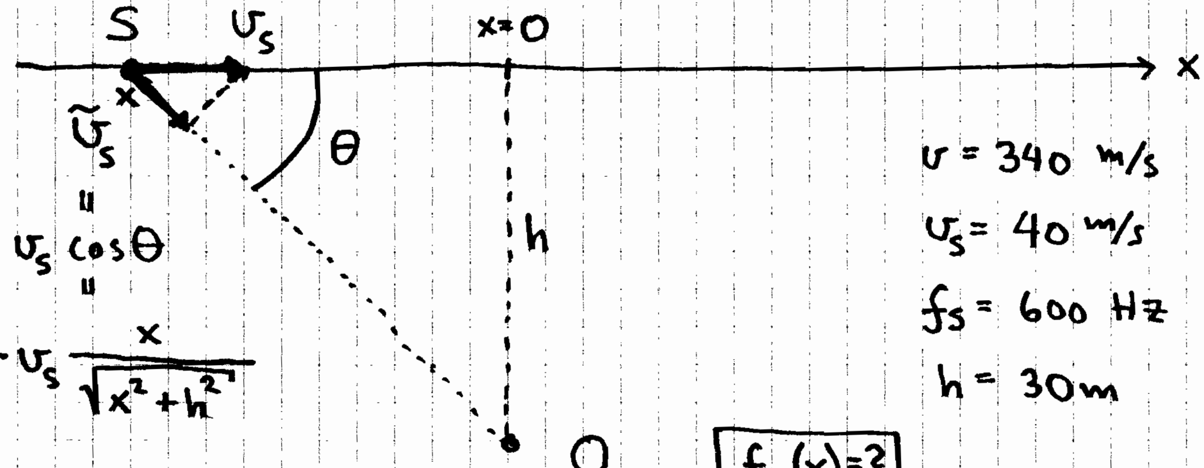
Frekv. målt av O : $f_O = \dfrac{v - v_O}{\lambda} = \dfrac{v - v_O}{v - v_S} \cdot f_S$

4) Vind; v_m = mediets (luftas) fart

Bølgefart relativt bakken: $v + v_m$

$\Rightarrow$ Frekv. målt av O: $$\boxed{f_O = \frac{v + v_m - v_O}{v + v_m - v_s} \cdot f_s}$$

Eks:



$$\tilde{v}_s = v_s \cos\theta = -v_s \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

$v = 340$ m/s

$v_s = 40$ m/s

$f_s = 600$ Hz

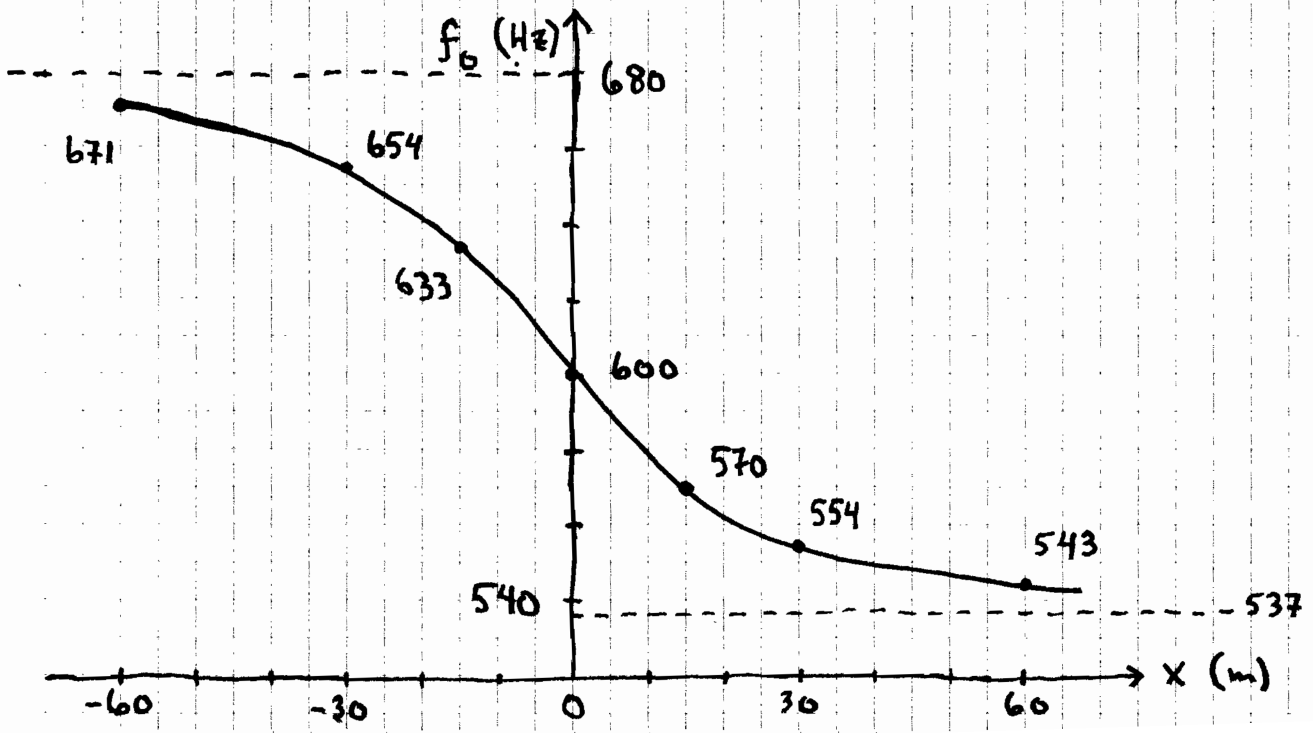
$h = 30$ m

$\boxed{f_O(x) = ?}$

Løsn:

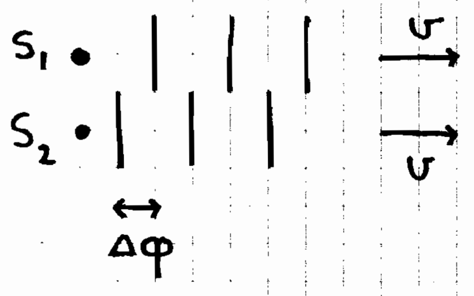
$$f_O(x) = \frac{v f_s}{v - \tilde{v}_s(x)} = f_s \cdot \left\{1 + \frac{v_s}{v} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\right\}^{-1}$$

$$= 600\ \text{Hz} \cdot \left\{1 + \frac{2x}{17\sqrt{x^2+900}}\right\}^{-1} \quad (\text{med } [x] = \text{m})$$



Interferens [YF 15.6, 16.6 ; LL 10.7]

"Flere bølger på samme sted til samme tid"



$y_1(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_1)$

$y_2(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_2)$

O

$y(x,t) = ?$

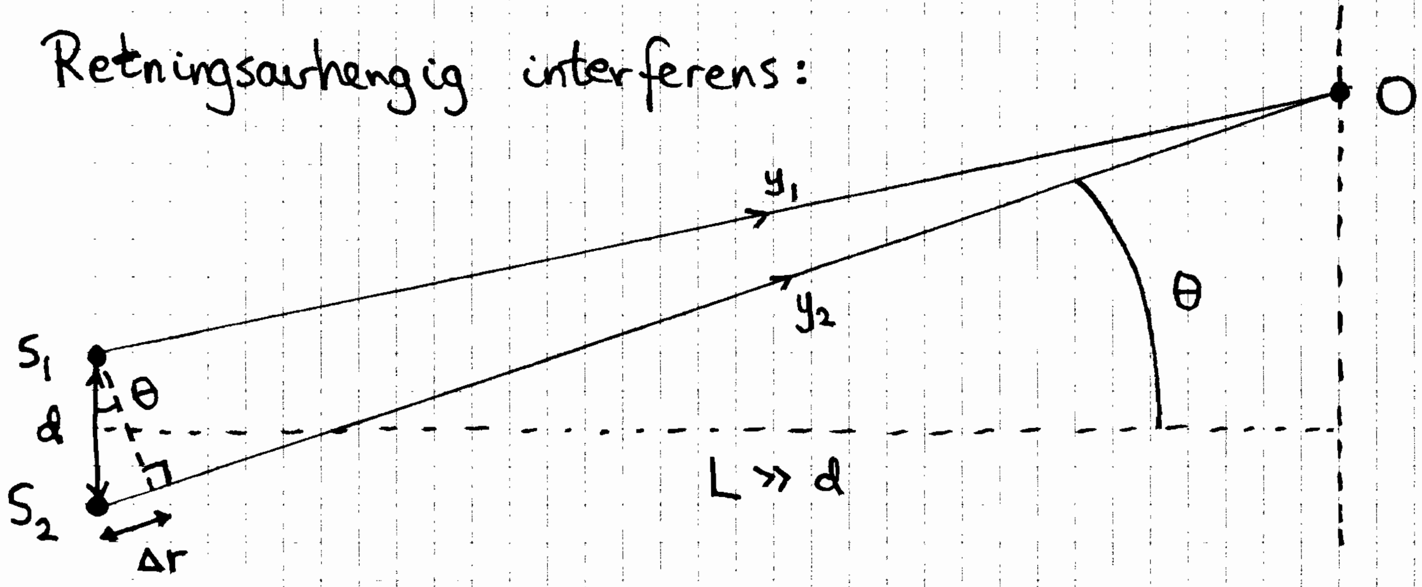
$$\left[\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \right]$$

$$\Rightarrow y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2 y_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos\left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ <u>Konstruktiv</u> interferens, max amplitude $2y_0$, når $\varphi_1 = \varphi_2$, dvs y_1 og y_2 <u>i fase</u> ved O.

<u>Destruktiv</u> interferens, min amplitude null, når $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, dvs y_1 og y_2 <u>i motfase</u> ved O.

Retningsavhengig interferens:



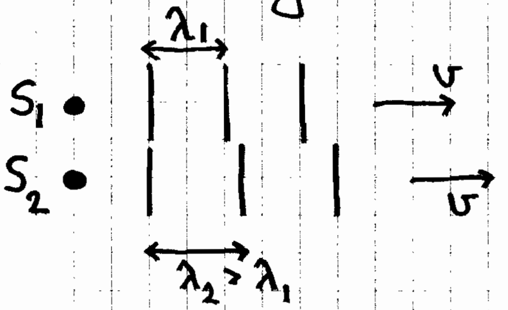
Anta at S_1 og S_2 er to bølgekilder som svinger i fase.

Veilengdeforskjell: $\Delta r \approx d \cdot \sin\theta$

$\Rightarrow$ Max I ved O når $d \cdot \sin\theta = n \cdot \lambda$

Min I ved O når $d \cdot \sin\theta = (n + \frac{1}{2})\lambda$ $\quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

Sveuning [YF 16.7 ; LL 10.7]



$\xi_1(x,t) = \xi_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$ $x_0 = 0$

$\xi_2(x,t) = \xi_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$ $\xi(0,t) = ?$

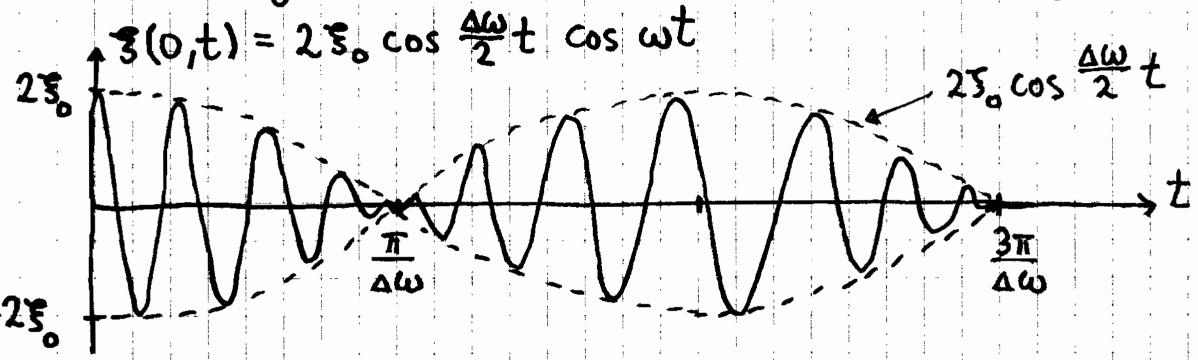
$\left[\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\right]$

Total (lyd-)bølge:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cdot\cos(kx - \omega t)$$

med $\Delta k = k_1 - k_2$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, $k = (k_1+k_2)/2$, $\omega = (\omega_1+\omega_2)/2$

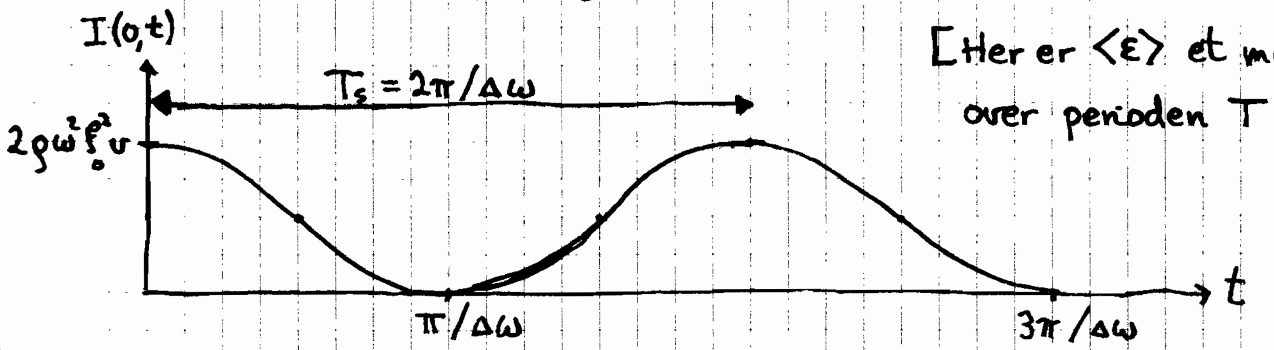
Observert bølge ved $x_0 = 0$; antar $\Delta k \ll k$ og $\Delta\omega \ll \omega$:



Intensitet: $I(0,t) = \langle\varepsilon\rangle v = \frac{1}{2}\rho\omega^2(2\xi_0)^2 v \cdot \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)^2$

$= \rho\omega^2\xi_0^2 v \{1 + \cos(\Delta\omega t)\}$

[Her er $\langle\varepsilon\rangle$ et middel over perioden $T = 2\pi/\omega$.]

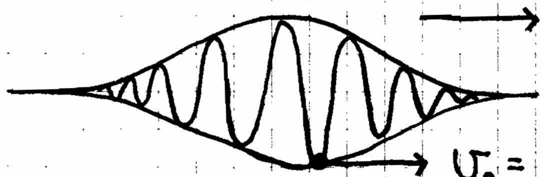


Konklusjon: Vi hører tonen (frekvensen) $f = \omega/2\pi = (f_1+f_2)/2$, med modulert intensitet, såkalt sveuning (beats), med svevefrekvens $f_s = 1/T_s = \Delta\omega/2\pi = (\omega_1-\omega_2)/2\pi = f_1 - f_2$.

Anvendelse: Instrumentstemming.

Gruppehastighet. Dispersjon

Totalbølgen s. 107, $\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cdot\cos(kx-\omega t)$, har hurtig varierende bærebølge $\cos(kx-\omega t)$ med hastighet $v = \omega/k = v_f$ = fasehastighet, og en langsomt varierende modulasjonsbølge $\cos(\Delta k\cdot x/2 - \Delta\omega\cdot t/2)$ med hastighet $\Delta\omega/\Delta k$. Hvis $\Delta\omega$ og Δk er små, er $\Delta\omega/\Delta k \approx d\omega/dk$.



$\longrightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk}$ = gruppehastigheten

$\longrightarrow v_f = \frac{\omega}{k}$ = fasehastigheten

$v_g = d\omega/dk$ er felleshastigheten til hele bølgepakken
$v_f = \omega/k$ er hastigheten til f.eks. en bestemt bølgedal (-topp)

Funksjonen $\omega(k)$ kalles dispersjonsrelasjonen. For både transv. bølger på streng ($v_f = \sqrt{S/\mu}$) og longitudinale bølger i et elastisk medium, lydbølger, ($v_f = \sqrt{B/\rho}$) har vi lineær dispersjonsrelasjon, dvs $\omega = v_f\cdot k$ med konstant v_f. [Dvs: Samme v_f for alle frekvenser.]
Da er $v_g = d\omega(k)/dk = d[v_f\cdot k]/dk = v_f$, og hele bølgepakken har samme hastighet som en gitt bølgetopp.

Overflatebølger på dypt vann (dybde $\gg \lambda$), med ikke altfor liten bølgelengde ($\lambda \gg 1.7$ cm), har bølgefart som bestemmes av tyngdens akselerasjon ("tyngdebølger"): $v_f(k) = \sqrt{g/k}$.
Da er $\omega(k) = v_f(k)\cdot k = \sqrt{g\cdot k}$, og $v_g(k) = \frac{1}{2}\sqrt{g/k} = v_f(k)/2$.
$\Rightarrow$ Nye bølgetopper "skapes" bakerst i bølgepakken, "spaserer" gjennom bølgepakken, og "dør ut" fremst i bølgepakken!! Med $\lambda = 10$ m er $k = 0.63\ \mathrm{m}^{-1}$, og $v_f \approx 4$ m/s mens $v_g \approx 2$ m/s.