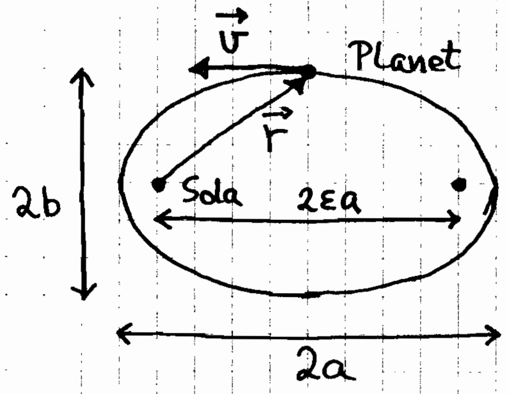
Gravitasjon [YF 13 ; LL 11] $\boxed{03.11.14}$

[Kort historikk fra Ptolemaeus til Einstein, se notat fra 2011]

Keplers lover (1571-1630) [YF 13.5 ; LL 11.5]

Analyserte Brahes observasjoner (1546-1601)

K1 : Ellipseformede planetbaner med sola i et av brennpunktene



$\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ = eksentrisitet

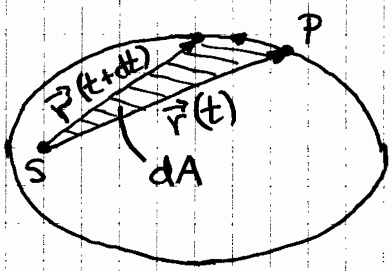
sirkel : $\varepsilon = 0$

ellipse : $0 < \varepsilon < 1$

parabel : $\varepsilon = 1$

hyperbel : $\varepsilon > 1$

K2 : $\vec{r}$ sveiper over et konstant areal pr tidsenhet



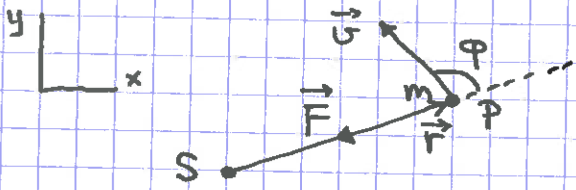
$$\frac{dA}{dt} = \text{konst.}$$

K3 : T^2/a^3 = konst. for alle planetene

T = omløpstid , a = store halvakse

[Bare tilnærmet riktig ; $T^2/a^3 = 4\pi^2 / G\cdot(M_s + m_p)$]

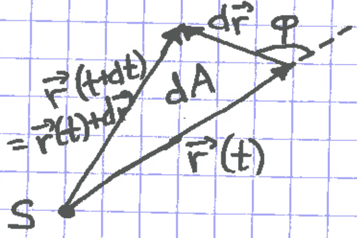
K2: [K1, K3: Klassisk mekanikk, 5. semester (evt. 7. sem)]



$\vec{F} \sim -\hat{r} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$

$\Rightarrow \vec{L} = L\hat{z} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{konst.}$

$L = r \cdot mv \cdot \sin\varphi$



dA = halvt parallellogram (R2)

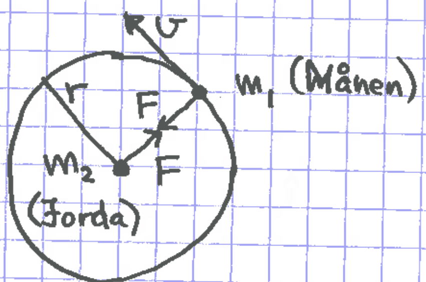
$= \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} r \, dr \sin\varphi$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{dr}{dt} \sin\varphi = \frac{1}{2} r v \sin\varphi = \frac{L}{2m} = \text{konst.}$$

(1642-1727) (Principia, 1687) 06.11.14

Newtons gravitasjonslov [YF 13.1; LL 2.5, 11.1]

Anta sirkelbane: $\varepsilon = 0$, $a = b = r$ [Jorda: $\varepsilon = 0.0167$; Månen: $\varepsilon = 0.0549$]



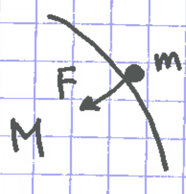
- $K2 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.} \Rightarrow \vec{F} \sim -\hat{r}$
- sirkel $\Rightarrow F = m_1 \omega^2 r = m_1 (2\pi/T)^2 r$
- $K3 \Rightarrow T^2 = C \cdot a^3 = C \cdot r^3 \Rightarrow F \sim m_1/r^2$
- $N3 \Rightarrow F_{12} = F_{21} \Rightarrow F \sim m_2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -G\,(m_1 m_2 / r^2)\,\hat{r}}$$

$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

(Cavendish 1798; Du 2014 (?))

På jordas overflate:



$F = mg$ med $g = GM/R^2 \approx 9.81\ \mathrm{m/s^2}$

Potensiell energi [YF 13.3 ; LL 11.1]

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \quad ; \quad U(\vec{r}_0) = 0$$

Velger $U(\infty) = 0$

$$\Rightarrow U(r) = -\int_{\infty}^{r} (-GmM/r^2)dr = GmM \Big|_{\infty}^{r} \left(-\frac{1}{r}\right) = \underline{\underline{-\frac{GmM}{r}}}$$

= pot. energi for to masser m, M i innbyrdes avstand r

Eks: Masse m i jordas tyngdefelt, $U(z) - U(0) = ?$

z = høyde over bakken

Løsn: $U(z) - U(0) = -\frac{GmM}{R+z} + \frac{GmM}{R} = GmM \frac{-R+R+z}{R(R+z)}$

$$= GmM \frac{z}{R(R+z)} \overset{R \gg z}{\approx} m \cdot \frac{GM}{R^2} \cdot z = \underline{\underline{mgz}}$$

Satellitter [YF 13.4]

Anta sirkulær bane (ofte tilfelle i praksis)

$F = ma$; $F = GMm/r^2$, $a = v^2/r$

$$\Rightarrow GMm/r^2 = mv^2/r \Rightarrow \underline{v = \sqrt{GM/r}}$$

Geostasjonær bane: $T = 24\,h$; over fast sted på ekvator

$\Rightarrow r = 42246$ km [Øv. 11]

Total energi: $E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - GMm/r = \frac{1}{2}m \cdot GM/r - GMm/r$

$$= \underline{-GMm/2r}$$

$$\Rightarrow K = -\frac{1}{2}U = -E > 0$$

Potensial og felt [LL 11.1]

Feltstyrke $\overset{\text{def}}{=}$ Kraft pr masseenhet

$$\vec{g} = \lim_{m \to 0} \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{MG}{r^2}\hat{r}$$

= gravitasjonsfeltet som M omgir seg med

Potensial $\overset{\text{def}}{=}$ Pot. energi pr masseenhet

$$V(r) = \lim_{m \to 0} \frac{U(r)}{m} = -\frac{MG}{r}$$

= gravitasjonspotensialet som M omgir seg med

Fra før:

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad \vec{F} = -\hat{r}\frac{dU}{dr}$$

Divisjon med m gir:

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} \vec{g} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad dV = -\vec{g} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad \vec{g} = -\hat{r}\frac{dV}{dr}$$

Tilsvarende for andre konservative krefter (s. 22), f.eks. elektrostatisk kraft mellom ladninger q og Q (s. 10):

$$\vec{F} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \vec{F}/q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$ = elektrisk felt som Q omgir seg med

$$U(r) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ = pot. energi for q og Q i innbyrdes avstand r

$$V(r) = U(r)/q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ = Coulombpotensialet som Q omgir seg med

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad \vec{E} = -\hat{r}\frac{dV}{dr}$$

[MA1103/TMA4105: $\vec{E} = -\nabla V$; $\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$]