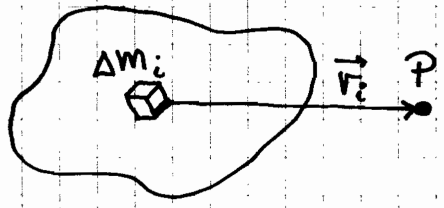
V og $\vec{g}$ fra massefordeling [YF 13.6; LL 11.2]

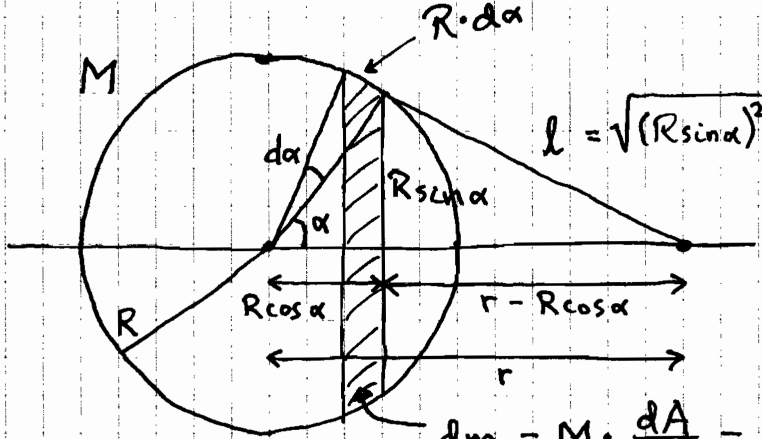
10.11.14



Potensial i P:

$$V_P = \sum_i V_P^i = -G\sum_i \frac{\Delta m_i}{r_i} \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} -G\int \frac{dm}{r}$$

Eks 1: Kuleskall



$$\ell = \sqrt{(R\sin\alpha)^2 + (r - R\cos\alpha)^2} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\alpha}$$

$$dm = M\cdot\frac{dA}{A} = M\cdot\frac{(2\pi R\sin\alpha)(R\,d\alpha)}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}M\sin\alpha\,d\alpha$$

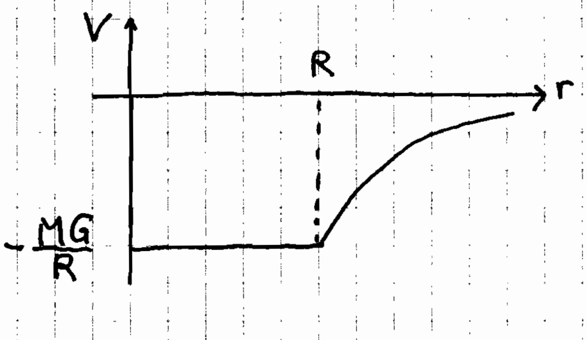
$$\Rightarrow V(r) = -G\int\frac{dm}{\ell} = -\frac{1}{2}MG\int_0^\pi \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\alpha}}$$

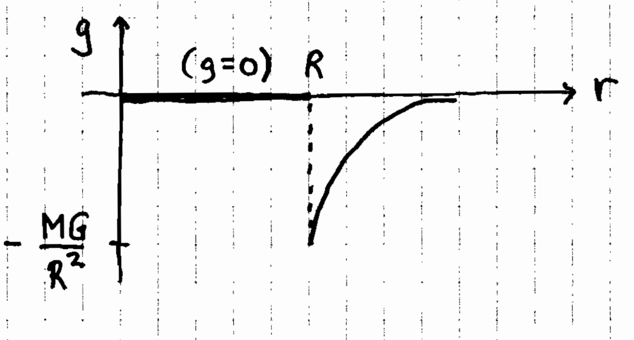
$$= -\frac{1}{2}MG\,\Big|_0^\pi \frac{1}{rR}\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\alpha}$$

$$= -\frac{MG}{2rR}\Big\{\underbrace{\sqrt{R^2+r^2+2rR}}_{=R+r} - \underbrace{\sqrt{R^2+r^2-2rR}}_{=r-R}\Big\} = -\frac{MG}{r}$$

Hvis $r < R$: Alt likt, unntatt $\sqrt{R^2+r^2-2rR} = R - r \Rightarrow V(r) = -\frac{MG}{R}$

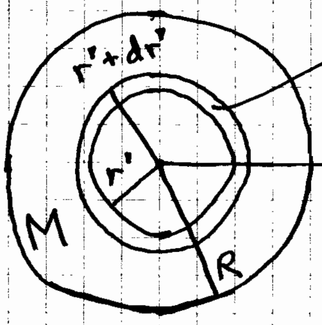
Feltet blir: $\vec{g}(r) = -\hat{r}\,dV/dr = \begin{cases} 0 & (r<R) \\ -\hat{r}\,MG/r^2 & (r>R)\end{cases}$





Eks 2: Kompakt kule

V fra kompakt kule $= \int dV$ fra tynne kuleskall



$$dm' = M \cdot dv'/v' = M \cdot 4\pi r'^2 dr' / \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \frac{3M}{R^3} r'^2 dr'$$

$$\Rightarrow dV = -G\frac{dm'}{r} = -\frac{3MG}{rR^3} r'^2 dr'$$

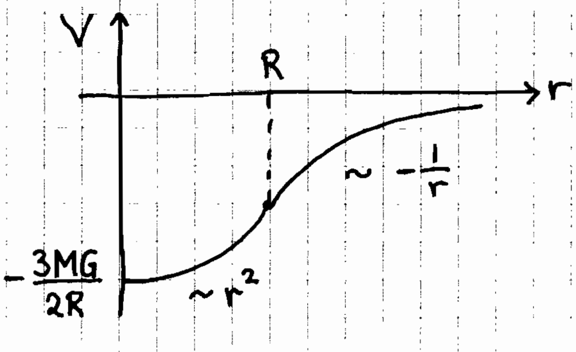
$$\Rightarrow V(r) = -\frac{3MG}{rR^3}\int_0^R r'^2 dr' = -\frac{MG}{r}$$

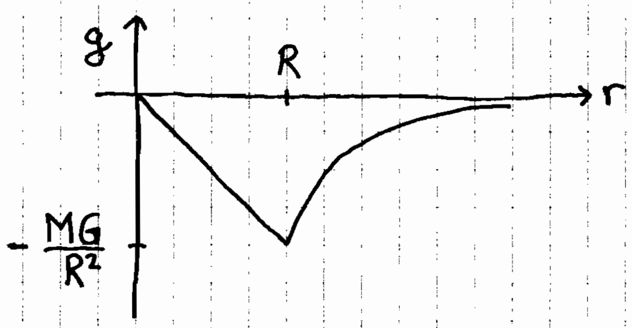
Hvis $r < R$: Må bruke $dV = -G\,dm'/r$ fra kuleskall med $r' < r$

og $dV = -G\,dm'/r'$ fra kuleskall med $r' > r$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{3MG}{R^3}\left\{\underbrace{\int_0^r \frac{r'^2 dr'}{r}}_{=r^2/3} + \underbrace{\int_r^R \frac{r'^2 dr'}{r'}}_{=\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2}\right\} = -\frac{3MG}{2R}\left\{1 - \frac{r^2}{3R^2}\right\}$$

Feltet: $\vec{g}(r) = -\hat{r}\, dV/dr = \begin{cases} -\hat{r}\, MGr/R^3 & (r < R) \\ -\hat{r}\, MG/r^2 & (r > R) \end{cases}$





Kraft på masse m ved $r = R$:

$$\vec{F}(R) = m \cdot \vec{g}(R) = -\hat{r}\,\frac{MG}{R^2}\cdot m$$

Dvs: Som om hele massen M var samlet i sentrum!

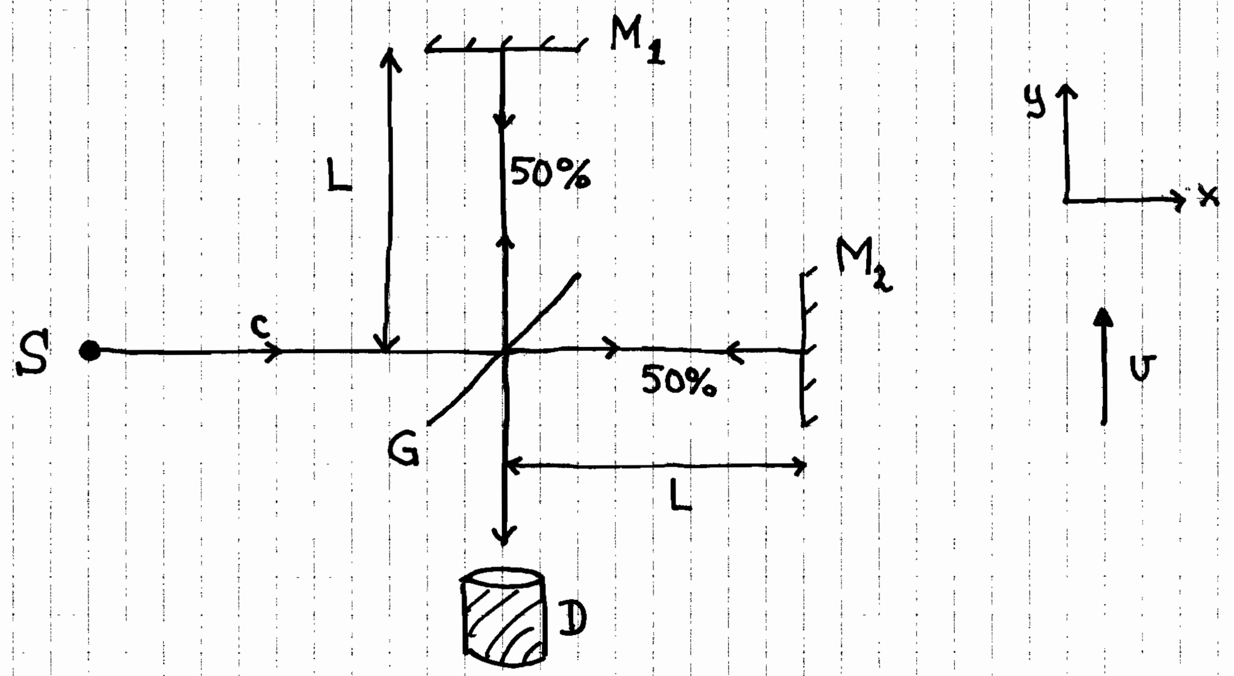
$\Rightarrow$ OK å bruke $\vec{F} = m\vec{g}$ med $g = MG/R = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$

for legeme på jordoverflaten, slik vi alltid har gjort.

SPESIELL RELATIVITETSTEORI [YF 37; LL 12]

Michelson - Morley - eksperimentet [YF 35.5 ; LL s.356]

"On the relative motion of the earth and the luminiferous ether", The American Journal of Science, 34, 333 - 345 (1887).



M_1, M_2 : speil

S : lyskilde

G : stråledeler $(T = R = 1/2)$

D : detektor

v : jordas hastighet relativt eteren, et tenkt medium som lysbølgene forplanter seg i

c : lysets hastighet, ca $3 \cdot 10^8$ m/s (kjent siden 1729, James Bradley)

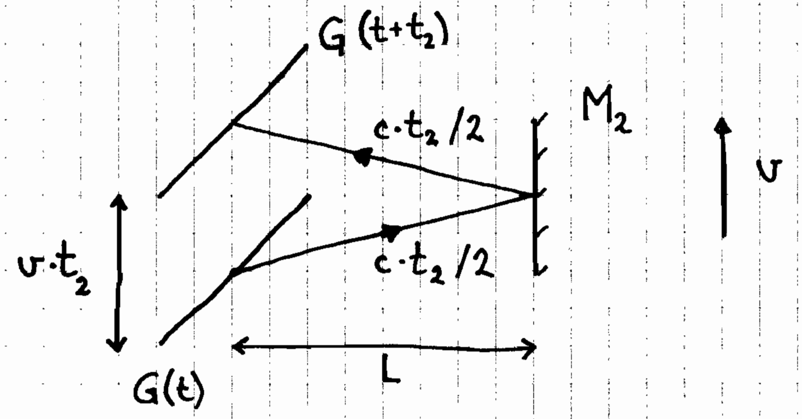
Interferens mellom bølgene som har gått hhv SGM_1GD og SGM_2GD.

Tid brukt av lysbølge på GM_1G:

$$t_1 = t(GM_1) + t(M_1G) = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{L(c+v+c-v)}{(c-v)(c+v)} =$$

$$= \frac{2Lc}{c^2-v^2} = \frac{2L}{c(1-v^2/c^2)} \approx \frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \left[\frac{1}{1-x} \overset{|x|\ll 1}{\approx} 1+x\right]$$

Tid brukt av lysbølge på GM_2G:



$$(v\cdot t_2)^2 + (2L)^2 = (c\cdot t_2)^2$$

$$\Rightarrow t_2^2(c^2-v^2) = (2L)^2$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{2L}{(c^2-v^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{2L}{c}(1-v^2/c^2)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{2L}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\left[(1-x)^{-1/2} \overset{|x|\ll 1}{\approx} 1+\frac{1}{2}x\right]$$

Tidsforskjell: $\Delta t = t_1 - t_2 = \dfrac{Lv^2}{c^3}$

Veiforskjell: $\Delta r = c\cdot\Delta t = L\cdot v^2/c^2$

Faseforskjell: $k\cdot\Delta r = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot L\cdot\dfrac{v^2}{c^2}$

Ved å rotere apparaturen 90° bytter M_1 og M_2 rolle, og Δt, Δr og $k\Delta r$ skifter fortegn.

Dette gir en fasedifferanse mellom de to eksperimentene:

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi L v^2}{\lambda c^2}$$

M & M 1887: $L = 11$ m, $\lambda = 550$ nm, $v \approx 3\cdot 10^4$ m/s (for jordas hastighet i bane rundt sola; dvs vi antar en eter i ro relativt sola)

Basert på denne teorien forventet M&M en <u>endring i interferensmønsteret</u> ved detektoren D, ved å rotere interferometeret 90°:

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi \cdot 11 \cdot (3\cdot10^4)^2}{5.5\cdot10^{-7}\cdot(3\cdot10^8)^2} = 0.4\cdot 2\pi$$

Eksperimentene gav $\Delta\varphi < 0.01 \cdot 2\pi$.

M&M konkluderte med at eteren, mediet som lyset forplantet seg i, måtte være i ro relativt jorda. Eteren ble dratt med jorda. ("Ether drag".)

Eter-hypotesen ble etterhvert forkastet. Einstein skar gjennom: Det <u>er</u> ingen eter! Og ingen inertialsystemer er bedre enn andre!

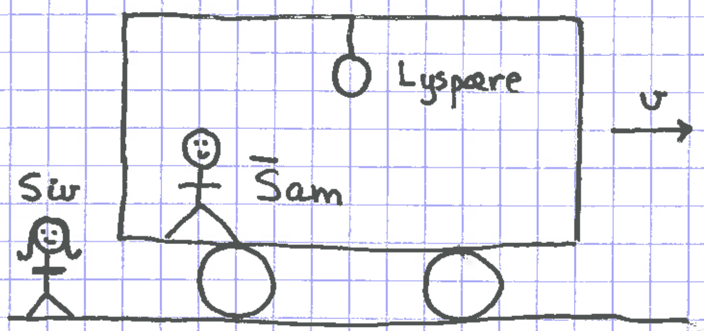
Einsteins to postulater:

1. Relativitetsprinsippet: Alle fysikkens lover er de samme i alle inertialsystemer.
2. Lysets hastighet i vakuum er den samme for alle observatører, og uavhengig av lyskildens bevegelse.

[Inertialsystem: Ref.system der N1 gjelder: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konstant}$]

Vi skal se på <u>konsekvenser</u> av Einsteins postulater.

Samtidighet [YF 37.2 ; LL 12.5]



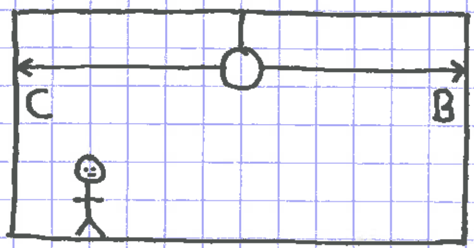
Hendelser:

A: Lyset slås på

B: Lyset når frontveggen

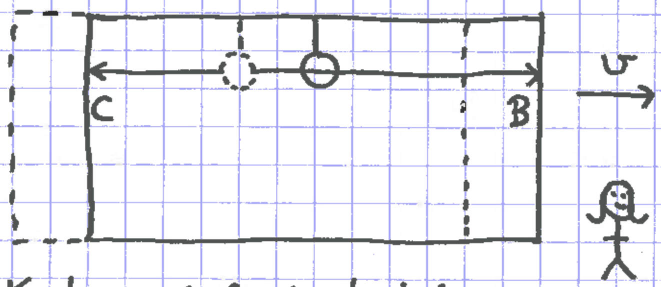
C: Lyset når bakveggen

S̄am:



⇒ B og C samtidig

Siv



Kortere vei for lyset til bakvegg enn frontvegg ⇒ C før B

Dvs:

> To hendelser som er samtidige i ett inertialsystem er generelt ikke samtidige i et annet.

Merk at S̄am og Siv er flinke, og korrigerer for f.eks. ulik tid brukt av lyset fra C til S̄ams og Sivs øyne.

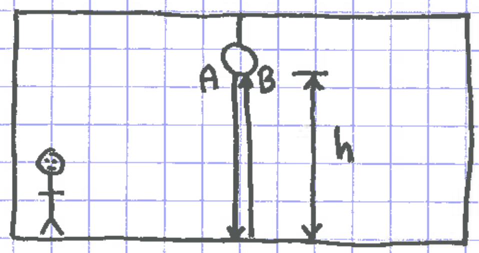
Tidsdilatasjon [YF 37.3; LL 12.4]

Hendelser:

A: Lyset slås på

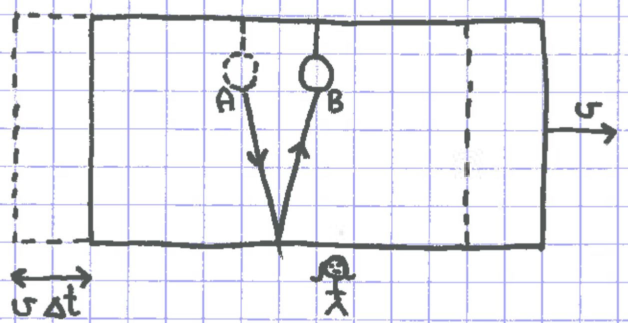
B: Lyset er tilbake ved lampa etter refleksjon i gulvet

$\bar{S}$am:



$$\Delta\bar{t} = \frac{2h}{c}$$

Siv:

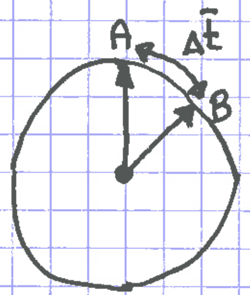


$$\left(c\cdot\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = h^2 + \left(v\cdot\frac{\Delta t}{2}\right)^2$$

$$(\Delta t)^2 = \frac{4h^2}{c^2-v^2}$$

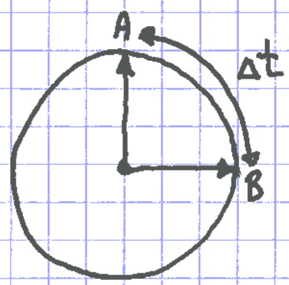
$$\Delta t = \frac{2h/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta\bar{t}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > \Delta\bar{t}$$

Dvs: $\boxed{\text{Kortest tid, } \Delta\bar{t}\text{, måles i systemet } \bar{S} \text{ der hendelsene skjer på samme sted. Klokker i bevegelse går saktere enn klokker i ro.}}$



$\bar{S}$ams klokke

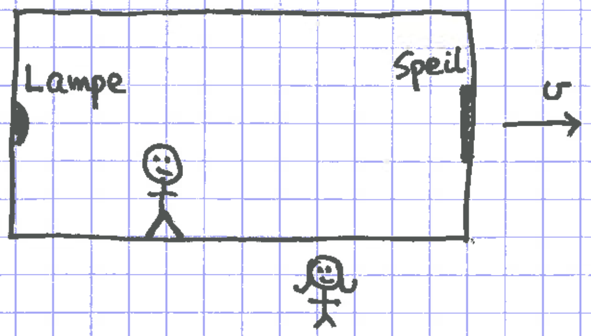
(i bevegelse)



Sivs klokke

(i ro)

Lengdekontraksjon [YF 37.4; LL 12.4]



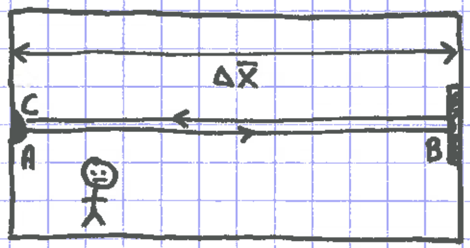
Hendelser:

A: Lyset slås på

B: Lyset reflekteres i speilet

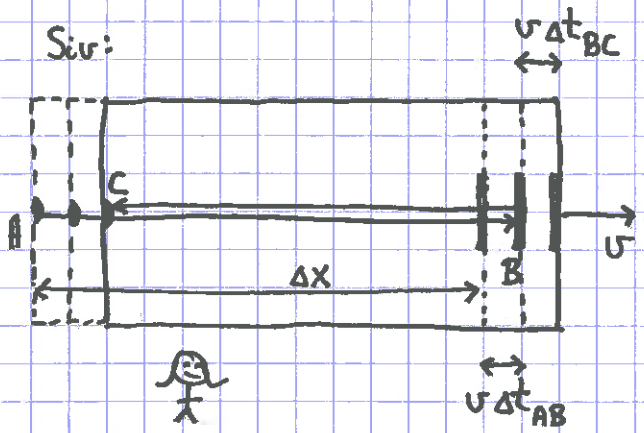
C: Lyset treffer bakveggen

$\bar{S}$am:



$$\Delta\bar{t}_{AC} = \frac{2\Delta\bar{x}}{c} \Rightarrow \Delta\bar{x} = \tfrac{1}{2}c\,\Delta\bar{t}_{AC}$$

Siv:



$$\Delta t_{AB} = \frac{\Delta x}{c} + \frac{v\,\Delta t_{AB}}{c}$$

$$\Delta t_{BC} = \frac{\Delta x}{c} - \frac{v\,\Delta t_{BC}}{c}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{AB} = \frac{\Delta x}{c-v}, \quad \Delta t_{BC} = \frac{\Delta x}{c+v}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{AC} = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} = \frac{\Delta x(c+v) + \Delta x(c-v)}{(c-v)(c+v)} = \frac{2c\,\Delta x}{c^2-v^2} = \frac{2\Delta x}{c}\cdot\frac{1}{1-v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \tfrac{1}{2}c\,\Delta t_{AC}\,(1 - v^2/c^2)$$

Pga tidsdilatasjon er: $\Delta\bar{t}_{AC} = \Delta t_{AC}\sqrt{1-v^2/c^2}$

$$\Rightarrow \Delta\bar{x} = \tfrac{1}{2}c\,\Delta t_{AC}\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > \Delta x$$

Dvs: **Objektet er lengst i systemet der det er i ro. Objekter i bevegelse krymper (i bevegelsesretningen).**

(Siv måler krympet vogn, $\Delta x = \sqrt{1-v^2/c^2}\,\Delta\bar{x} < \Delta\bar{x}$.)