Hva med lengder målt normalt på $\vec{v}$?

Hendelser:

A: Siv tegner blå strek $\Delta y = 1\,\mathrm{m}$ over bakken på en husvegg.

B: $\bar{\mathrm{S}}$am —"— rød —"— $\Delta \bar{y} = 1\,\mathrm{m}$ ——"—— samme husvegg.

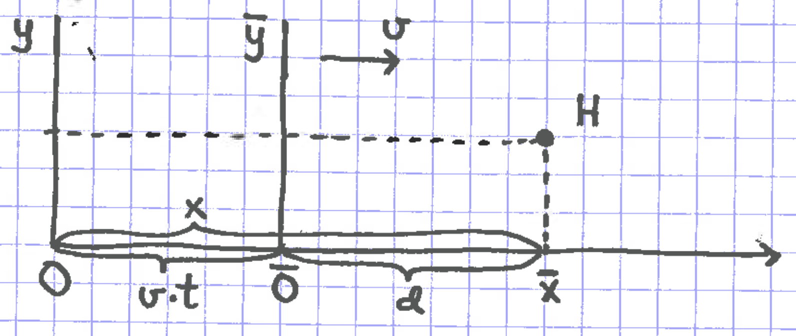
Hvis det er lengdekontraksjon $\perp \vec{v}$, vil Siv hevde at rød strek er nederst, mens $\bar{\mathrm{S}}$am vil hevde at blå strek er nederst.

S og $\bar{S}$ er like gode inertialsystemer $\Rightarrow$ Begge må ta feil!

$\Rightarrow \Delta y = \Delta \bar{y}$, og $\boxed{\text{ingen lengdekontraksjon } \perp \vec{v}.}$

Lorentztransformasjonene (LT) [YF 37.5; LL 12.2]

LT gir sammenhengen mellom en gitt hendelse H i S, dvs (x, y, z, t), og samme hendelse i $\bar{S}$, dvs $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$; $\bar{S}$ har hastighet $v\hat{x}$ relativt S; felles origo, $O = \bar{O}$, ved synkronisert tid $t = \bar{t} = 0$.



Galileo: $\bar{x} = x - vt$

$\bar{t} = t$

Einstein: $d = \bar{O}\bar{x}$ målt i S $= x - vt$

$\bar{x} = \bar{O}\bar{x}$ målt i $\bar{S}$ $= d/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ pga lengdekontraksjon

Innfører lorentzfaktoren: $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$

Dermed: $\bar{x} = \gamma(x - vt)$. Og siden S har hastighet $-v\hat{x}$ relativt $\bar{S}$, må vi omvendt ha: $x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$, der $\bar{d} = \bar{x} + v\bar{t} = Ox$ målt i $\bar{S}$ og $x = Ox$ målt i S.

Finner så $\bar{t}(x,t)$:

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) = \gamma(\gamma(x - vt) + v\bar{t})$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\gamma} - \gamma x + \gamma vt = v\bar{t}$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \gamma t - \frac{1}{v}\gamma x \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)}_{= 1 - 1 + v^2/c^2 = v^2/c^2} = \gamma t - \gamma x\, v/c^2$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right); \quad \text{og tilsvarende:} \quad t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right)$$

Ingen lengdekontraksjon $\perp \vec{v} \Rightarrow \bar{y} = y$ og $\bar{z} = z$

Dermed:

Hendelse i $\bar{S}$ uttrykt ved hendelse i S:

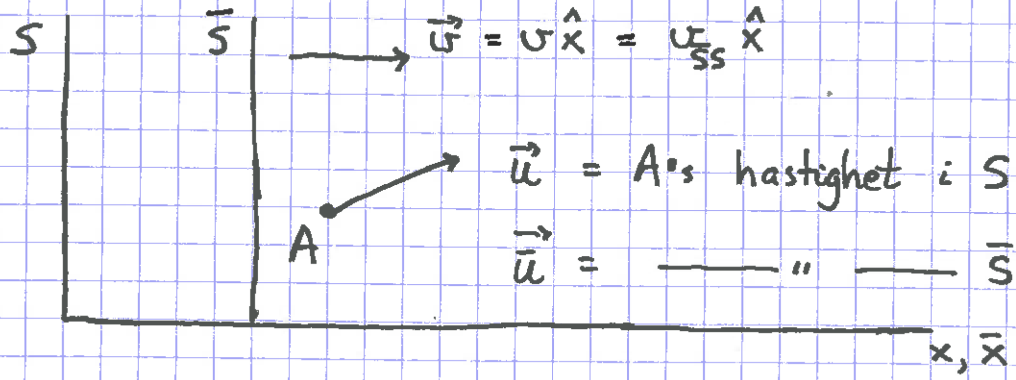
$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= \gamma(x - vt) \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z \\ \bar{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}}$$

Hendelse i S uttrykt ved hendelse i $\bar{S}$:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) \\ y &= \bar{y} \\ z &= \bar{z} \\ t &= \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right) \end{aligned}}$$

Her er $\vec{v}_{\bar{S}S} = -\vec{v}_{S\bar{S}} = v\hat{x}$ og $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Transformasjon av hastighet [YF 37.5; LL 12.3]



$\vec{v} = v\hat{x} = v_{\bar{S}S}\,\hat{x}$

$\vec{u}$ = A's hastighet i S $\quad (= \vec{v}_{AS})$

$\vec{\bar{u}}$ = —— " —— $\bar{S}$ $\quad (= \vec{v}_{A\bar{S}})$

Galileo: $u_x = \bar{u}_x + v\,,\quad u_y = \bar{u}_y\,,\quad u_z = \bar{u}_z$

Einstein: $d\bar{x} = \gamma(dx - v\,dt),\ d\bar{y} = dy,\ d\bar{z} = dz,\ d\bar{t} = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)$

$$\Rightarrow \bar{u}_x = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{dx/dt - v}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot dx/dt} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

Tilsvarende:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(d\bar{x} + v\,d\bar{t})}{\gamma(d\bar{t} + \frac{v}{c^2}d\bar{x})} = \frac{\bar{u}_x + v}{1 + \frac{\bar{u}_x v}{c^2}}$$

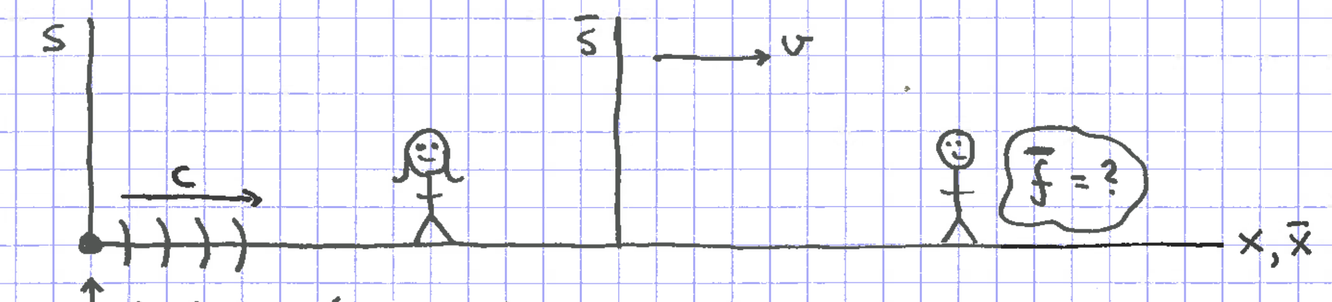
Einsteins addisjons-formel

Videre:

$$\bar{u}_y = \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{u_y/\gamma}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}\,; \qquad u_y = \frac{\bar{u}_y/\gamma}{1 + \frac{\bar{u}_x v}{c^2}}$$

$$\bar{u}_z = \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{u_z/\gamma}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}\,; \qquad u_z = \frac{\bar{u}_z/\gamma}{1 + \frac{\bar{u}_x v}{c^2}}$$

Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger [YF 37.6; LL 12.6]



Lyskilde (Bølgekilde) i ro i S, frekvens f

Siv måler tid for utsendelse av bølgepulser (bølgetopper) og tid for ankomst av bølgepulsene hos $\bar{S}$am; dessuten $\bar{S}$ams posisjon ved disse tidspunktene:

1.puls sendes ut ved $t=0$, $\bar{S}$am i x_0

—"— ankommer $\bar{S}$am ved $t=t_1$, —"— $x_1 = x_0 + vt_1 = ct_1$

2.puls sendes ut ved $t=T$, —"— $x_0 + vT$

—"— ankommer $\bar{S}$am ved $t=t_2$, —"— $x_2 = x_0 + vt_2 = c(t_2 - T)$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) = c(t_2 - t_1) - cT$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{c}{c-v}\cdot T \qquad \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{cv}{c-v}\cdot T$$

Periode målt av $\bar{S}$am:

$$\bar{T} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = \gamma(t_2 - t_1) - \frac{\gamma v}{c^2}(x_2 - x_1)$$

$$= \gamma\frac{c}{c-v}T - \gamma\frac{v}{c^2}\cdot\frac{cv}{c-v}\cdot T = \gamma\frac{c}{c-v}\underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{=1/\gamma^2}T$$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{c}{c-v}\cdot T$$

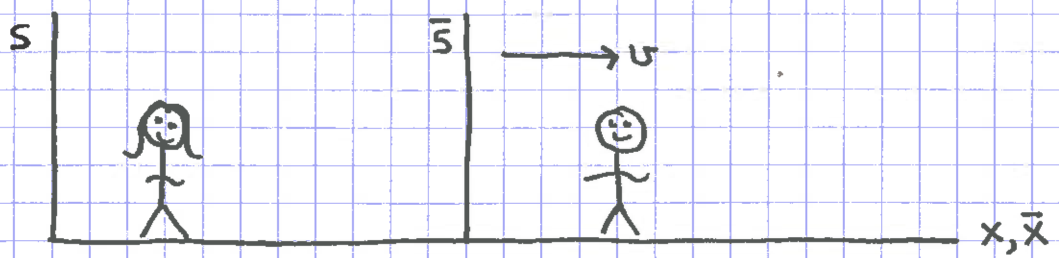
$$= \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{(c-v)^2}}\cdot T = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\cdot T$$

Frekvens målt av $\bar{S}$am: $\bar{f} = \bar{T}^{-1} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\, f}}$

Hvis $v \ll c$: $\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \approx \left(1 - \frac{v}{2c}\right)\left(1 - \frac{v}{2c}\right) \approx 1 - \frac{v}{2c} - \frac{v}{2c} \ldots = 1 - \frac{v}{c}$

$\Rightarrow \bar{f} = f\cdot\left(1 - \frac{v}{c}\right)$; som lyd med kilde i ro og observatør i bevegelse

Relativistisk mekanikk [YF 37.7, 37.8 ; LL 12.7, 12.8]



$\bar{S}$am kan definere:

Ordinær hastighet : $v = dx/dt$ (dx og dt målt av Siv)

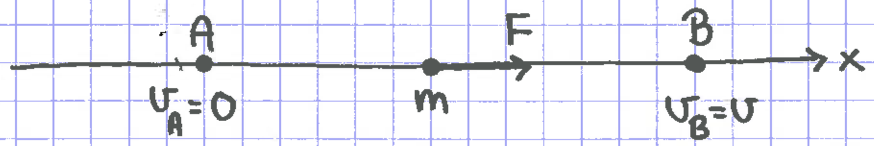
Egenhastighet : $\eta = dx/d\bar{t}$ (d$\bar{t}$ målt av $\bar{S}$am) ($d\bar{x}=0$)

Pga tidsdilatasjon, $d\bar{t} = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$, er $\vec{\eta} = \gamma\vec{v} = \dfrac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Prinsippet om impulsbevarelse er intakt hvis relativistisk impuls defineres ved egenhastigheten:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{\eta} = \gamma m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Kinetisk energi :



$$K = W = \int_A^B F\,dx \overset{N2}{=} \int_A^B \frac{dp}{dt}\,dx = \int_0^v \frac{dp}{dv}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v}\cdot dv$$

$$\frac{dp}{dv} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mv\cdot\frac{1}{2}\cdot 2v/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m(1-v^2/c^2) + mv^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow K = \int_0^v \frac{mv\,dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \Bigg|_0^v \frac{mc^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} = \underline{\underline{\gamma mc^2 - mc^2}}$$

Prinsippet om energibevarelse er intakt hvis størrelsen γmc^2 oppfattes som total energi.

Dermed:

Hvileenergi : $E_0 = mc^2$

Kinetisk energi : $K = (\gamma - 1)mc^2$

Total energi : $E = E_0 + K = \gamma mc^2$

I den ikke-relativistiske grensen, $v \ll c$:

$$\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \Rightarrow K \approx \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)mc^2 - mc^2 = \underline{\tfrac{1}{2}mv^2} \quad \text{ok!}$$

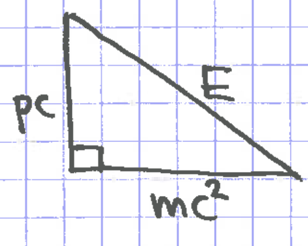
Nyttig sammenheng mellom E, p og m :

$$p = \gamma mv = \gamma mc^2 \cdot \frac{v}{c^2} = E \cdot \frac{v}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2c^2}{E^2}$$

$$\Rightarrow E^2 = (\gamma mc^2)^2 = (mc^2)^2\left(1 - \frac{p^2c^2}{E^2}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow E^2 - p^2c^2 = (mc^2)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2}$$



Eks: Foton. $m = 0$, $E = pc$. Partikkel i ro: $p = 0$, $E = mc^2$

Elastiske prosesser: E, $\vec{p}$ og K bevart ($\Rightarrow$ også m bevart)

Uelastiske — " — : E, $\vec{p}$ bevart; K, m ikke bevart

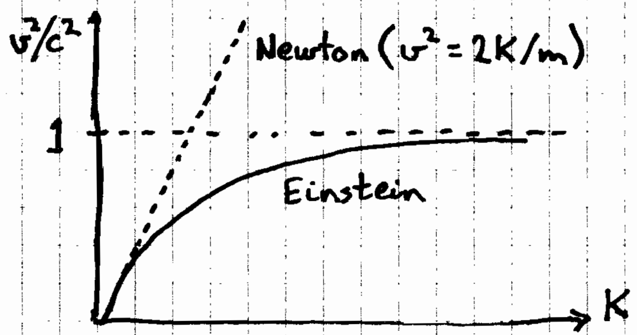
[Med størrelsene E, $\vec{p}$, K, m for <u>hele</u> systemet.]

EKSEMPLER

Eks 1: Bestem $v^2(K)$ for partikler med masse m.

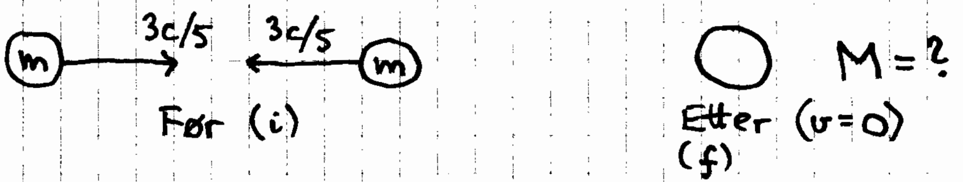
Løsn 1: $E = K + mc^2 = \gamma mc^2 \Rightarrow \gamma = (K+mc^2)/mc^2$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v^2 = c^2\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \underline{\underline{c^2\left(1 - \left(\frac{mc^2}{K+mc^2}\right)^2\right)}}$$



Exp: W. Bertozzi, American Journal of Physics 32, 551 (1964): Elektroner akselerert opp til $K = 15\,\text{MeV} \approx 30 \cdot mc^2$

Eks 2:



Løsn 2: $E_i = 2 \cdot \gamma_i mc^2$; $\gamma_i = (1 - 9/25)^{-1/2} = (16/25)^{-1/2} = 5/4$

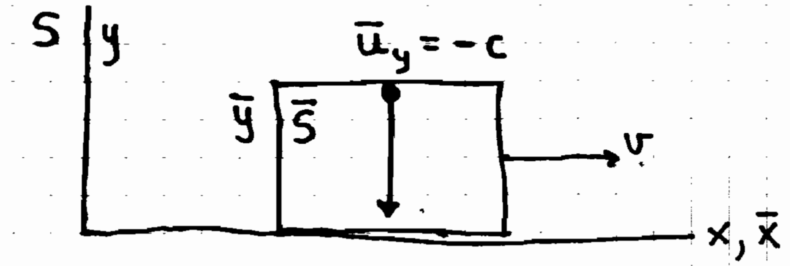
$\Rightarrow E_i = \frac{5}{2} mc^2$

$E_f = \gamma_f \cdot Mc^2 = Mc^2$

$E_f = E_i \Rightarrow \underline{\underline{M = \frac{5}{2} m}}$

Kinetisk energi før kollisjonen er omdannet til hvileenergi etter kollisjonen, og dermed økt masse.

Eks 3:



Bestem $\vec{u}$ (målt i S)

Løsn 3: Her er $\vec{v} = v\hat{x}$, $\vec{\bar{u}} = \bar{u}_x \hat{\bar{x}} + \bar{u}_y \hat{\bar{y}}$ med $\bar{u}_x = 0$, $\bar{u}_y = -c$,

og $\vec{u} = u_x \hat{x} + u_y \hat{y}$ skal bestemmes.

Fra s. 123:

$$u_x = (\bar{u}_x + v)/(1 + \bar{u}_x v/c^2) = v$$

$$u_y = (\bar{u}_y/\gamma)/(1 + \bar{u}_x v/c^2) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \bar{u}_y = -c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = v\hat{x} - c\sqrt{1 - v^2/c^2}\, \hat{y}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{v^2 + c^2(1 - v^2/c^2)} = \underline{c} \quad \text{ok!}$$

Hvis $v = c$: $u_x = c$, $u_y = 0$, $u = |\vec{u}| = c$

Hvis $\bar{u}_x = -v$ og $\bar{u}_y = -\sqrt{c^2 - v^2}$ (slik at

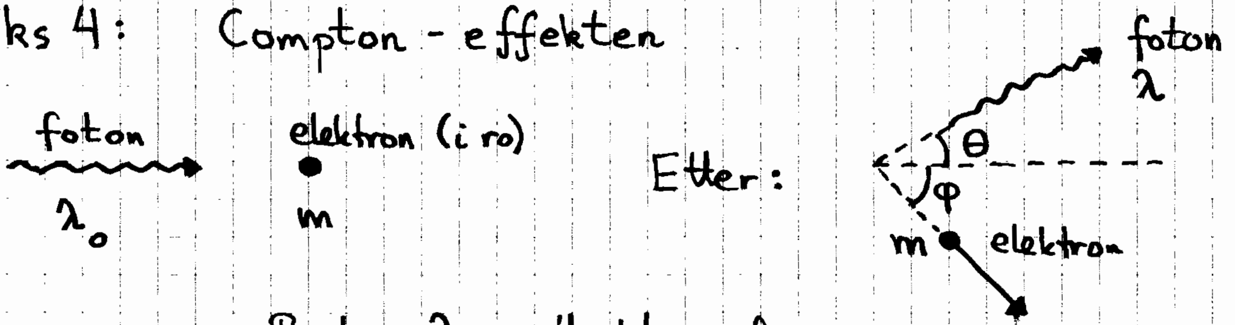
$\bar{u} = \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} = c$) :

$$u_x = (-v + v)/(1 - v^2/c^2) = 0$$

$$u_y = -\sqrt{c^2 - v^2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}/(1 - v^2/c^2) = -c$$

$$u = |\vec{u}| = c$$

Eks 4: Compton - effekten



Bestem λ, uttrykt ved λ_0, m og θ.

Løsn. 4:

Foton før kollisjon: energi E_0, impuls E_0/c (null masse)

Elektron —"—: —"— mc^2, null impuls

Foton etter: impuls $\vec{p}_f$, energi $E_f = p_f c$

Elektron —"—: —"— $\vec{p}_e$, energi E_e; $E_e^2 = (mc^2)^2 + (p_e c)^2$

Impulsbevarelse vertikalt: $p_e \sin\varphi = p_f \sin\theta$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{p_f}{p_e}\sin\theta = \frac{E_f}{p_e c}\sin\theta \quad \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{E_f \sin\theta}{p_e c}\right)^2}$$

Impulsbevarelse horisontalt: $\frac{E_0}{c} = p_f \cos\theta + p_e \cos\varphi$

$$\Rightarrow E_0 = E_f \cos\theta + p_e c \sqrt{1 - \left(\frac{E_f \sin\theta}{p_e c}\right)^2}$$

$$\Rightarrow (E_0 - E_f \cos\theta)^2 = (p_e c)^2 - E_f^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow p_e^2 c^2 = E_0^2 - 2E_0 E_f \cos\theta + E_f^2$$

Energibevarelse:

$$E_0 + mc^2 = E_f + E_e = E_f + \sqrt{(mc^2)^2 + (p_e c)^2}$$

$$= E_f + \sqrt{m^2c^4 + E_0^2 - 2E_0 E_f \cos\theta + E_f^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(E_0 + mc^2 - E_f)^2}_{} = m^2c^4 + E_0^2 - 2E_0E_f\cos\theta + E_f^2$$

$$= E_0^2 + m^2c^4 + E_f^2 + 2E_0mc^2 - 2E_0E_f - 2mc^2E_f$$

$$\Rightarrow E_f\left(E_0 - E_0\cos\theta + mc^2\right) = E_0 mc^2$$

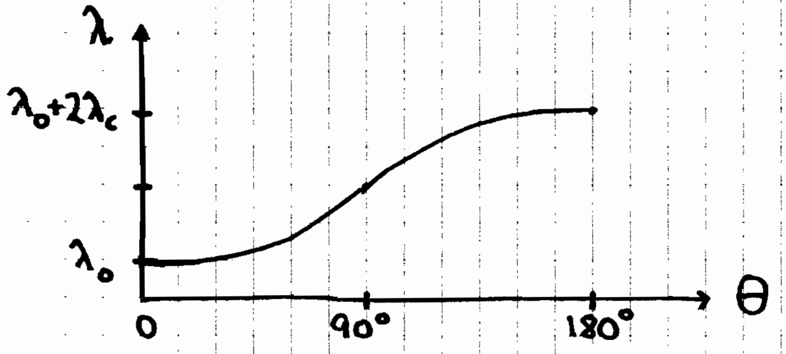
$$\Rightarrow E_f = \frac{E_0 mc^2}{E_0(1-\cos\theta) + mc^2} = \frac{1}{(1-\cos\theta)/mc^2 + 1/E_0}$$

Max Plancks kvantehypotese (1900): $E = hf$; h = Plancks konstant ($\approx 6.6\cdot 10^{-34}$ Js)

$$\Rightarrow E_f = hc/\lambda \quad ; \quad E_0 = hc/\lambda_0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{hc} = \frac{1-\cos\theta}{mc^2} + \frac{\lambda_0}{hc}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)}}$$



Stemmer godt med eksperimenter.

"Compton-bølgelengden": $\lambda_c = \dfrac{h}{mc}$

For elektronet: $\lambda_c = \dfrac{6.6\cdot 10^{-34}}{9.1\cdot 10^{-31}\cdot 3\cdot 10^{8}}\ \mathrm{m} \approx 2.4\cdot 10^{-12}\ \mathrm{m} = 0.024\ \text{Å}$

A.H. Compton, Physical Review 21, 483 (1923)