FY1001/TFY4145 Mekanisk Fysikk Eksamen Tirsdag 16. Desember 2014

LØSNINGSFORSLAG

OPPGAVE 1: Flervalgsoppgaver (Teller 45%, 18 stk som teller 2.5% hver)

1) $a = F_{\|}/m = mg\sin 30^\circ/m = g/2$. Riktig svar: C.

2) $a = F_{\|}/m = (f + mg\sin 30^\circ)/m = (\mu_k N + mg/2)/m = (\mu_k mg\cos 30^\circ + mg/2)/m = (1/\sqrt{3})\cdot g\cdot\sqrt{3}/2 + g/2 = g$. Riktig svar: D.

3) Legemet med minst treghetsmoment (mhp CM) får minst rotasjonsenergi, og dermed størst translasjonsenergi, og dermed størst hastighet og akselerasjon. Tynn ring har all masse på periferien, og dermed størst treghetsmoment. Tynt kuleskall har all masse i avstand R fra CM, og dermed større treghetsmoment enn kompakt kule. Dermed vinner den kompakte kula, foran kuleskallet, med ringen på tredjeplass. Riktig svar: D.

4) $\tau_{CM} = fR = \mu_k NR = \mu_k Mg\cos 30^\circ \cdot R = (1/2\sqrt{3})\cdot 1\cdot 9.81\cdot(\sqrt{3}/2)\cdot 0.1 \simeq 1/4$ Nm. Riktig svar: A.

5) $\tau_A = Mg\sin 30^\circ \cdot R = 1\cdot 9.81\cdot(1/2)\cdot 0.1 \simeq 1/2$ Nm. Riktig svar: B.

6) $p_1 = p_0 \Rightarrow 2mv_1 = mv_0 \Rightarrow v_1 = v_0/2 \Rightarrow K_1 = (1/2)\cdot 2m\cdot v_1^2 = mv_0^2/4 \Rightarrow |\Delta K| = mv_0^2/2 - mv_0^2/4 = mv_0^2/4$. Riktig svar: C.

7) Steiners sats gir $I_P = I_0 + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2I_0 = 2$ kg m^2. Riktig svar: C.

8) $(T_B/T_A)^2 = I_B d_A/I_A d_B$. Vi har $d_A = L/2$, $d_B = L/4$. Steiners sats gir da: $I_A = ML^2/12 + M(L/2)^2 = ML^2/3$ og $I_B = ML^2/12 + M(L/4)^2 = 7ML^2/48$. Dermed: $(T_B/T_A)^2 = (7/48)\cdot(1/2)/((1/3)\cdot(1/4)) = (7/96)/(1/12) = 7/8$. Riktig svar: D.

9) Massesenteret er i posisjon

$$x_{CM} = \frac{\int_0^L x\cdot(\mu_0 x/L)dx}{\int_0^L(\mu_0 x/L)dx} = \frac{\int_0^L x^2 dx}{\int_0^L x dx} = \frac{L^3/3}{L^2/2} = 2L/3.$$

Riktig svar: B.

10) $GmM/R^2 = mv^2/R = mR\omega^2 = 4\pi^2 mR/T^2$, dvs $T \sim R^{3/2}$, slik at periodeforholdet blir $2^{3/2} = 2\sqrt{2}$. Riktig svar: C.

11) $x_2 = (7/8 - 1/2)\cdot\sqrt{1+3} = (3/8)\cdot 2 = 3/4$, $x_3 = (7/8 - 3/8)\cdot\sqrt{1 + 3\cdot 9/16} = (4/8)\cdot\sqrt{43/16} = \sqrt{43}/8 \simeq 0.82$. Riktig svar: D.

12) Fra oppgave 18: $f_1 = \sqrt{S/\mu}/2L$, dvs $S = 4L^2 f_1^2 \mu = 4 \cdot 1.1^2 \cdot 41^2 \cdot 0.033 = 268.5$ N. Riktig svar: C.

13) $R = (\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2})^2/(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2 = (3-5)^2/(3+5)^2 = 4/64 = 1/16 \simeq 6\%$. Riktig svar: A.

14) $I(r) \sim 1/r^2$ for kuleformet kilde. Dermed: $100/10 = \log(I(1)/I_0)$, $50/10 = \log(I(r)/I_0)$, dvs $10 = \log I(1) - \log I_0$, $5 = \log I(r) - \log I_0$, dvs $5 = \log(I(1)/I(r)) = \log(r^2/1^2)$, dvs $r^2 = 10^5$ m^2, dvs $r \simeq 316$ m. Riktig svar: C.

15) $f = (f_1 + f_2)/2 = 445$ Hz. $T_s = |1/(f_1 - f_2)| = (1/10)$ s. Riktig svar: A.

16) Her er $kD = 2\pi D/\lambda = 2\pi \cdot 1/50 \simeq 0.13 \ll 1$, slik at $\omega^2 \simeq gk \cdot kD = gDk^2$, dvs $\omega \simeq \sqrt{gD}k$. Gruppehastighet og fasehastighet er nå like store, og $v_g = \sqrt{gD} = 99$ m/s, dvs ca 357 km/h. Da tar det ca 5 timer å tilbakelegge 1800 km. Riktig svar: A.

17) Her er $kD = 2\pi D/\lambda > 2\pi \cdot 50/10 \simeq 31 \gg 1$, slik at $\omega^2 \simeq gk \cdot 1$, dvs $\omega \simeq \sqrt{gk}$. Da blir gruppehastigheten $v_g = d\omega/dk = (1/2)\sqrt{g/k} = \sqrt{g/4k} = \sqrt{g\lambda/8\pi} \simeq 1.97$ m/s. Da tar det ca 240 sekunder å tilbakelegge 475 m, dvs ca 4 minutter. Riktig svar: B.

18) Her er $f_n = (n/2) \cdot S^{1/2} \cdot \mu^{-1/2} \cdot L^{-1}$, slik at

$$(\Delta f_n/f_n)^2 = (\Delta S/2S)^2 + (\Delta\mu/2\mu)^2 + (\Delta L/L)^2 = 0.015^2 + 0.025^2 + 0.01^2 = 9.5 \cdot 10^{-4}.$$

Dvs, $\Delta f_n/f_n = 0.03 = 3\%$. Riktig svar: B.

Fasit for Oppgave 1

Deloppgave	A	B	C	D
1			x	
2				x
3				x
4	x			
5		x		
6			x	
7			x	
8				x
9		x		
10			x	
11				x
12			x	
13	x			
14			x	
15	x			
16	x			
17		x		
18		x		

OPPGAVE 2: Uelastisk kollisjon mellom stav og kule (Teller 30%, 6% pr deloppgave)

a) $K_0 = mv^2/2$. $L = mvd/2$.

b) Steiners sats gir for staven $md^2/12 + m(d/2)^2 = md^2/3$. For kula: $m(d/2)^2 = md^2/4$. For stav + kule: $I = (1/3 + 1/4)md^2 = 7md^2/12$.

c) $L = I\omega \;\;\Rightarrow\;\; \omega = L/I$. Innsetting av L fra a og I fra b gir $\omega = (mvd/2)/(7md^2/12) = 6v/7d$.

d) $K_1 = I\omega^2/2$. Innsetting av I fra b og ω fra c gir $K_1 = (7md^2/12)(6v/7d)^2/2 = (7 \cdot 36/12 \cdot 49 \cdot 2)mv^2 = 3mv^2/14$. I den uelastiske kollisjonen er dermed kinetisk energi endret med $\Delta K = K_1 - K_0 = (3/14 - 1/2)mv^2 = -2mv^2/7$.

e) Vi kan innledningsvis fastslå at $\beta = 3/7$. Den kinetiske energien rett etter kollisjonen, $K_1 = 3mv^2/14$, går "tapt" i form av et friksjonsarbeid $W_f = f \cdot s = \mu N_B \cdot \theta \cdot d$. Her er $s = \theta d$ buelengden (veien) når omløpt vinkel er θ og radien er d. Normalkraften fra bordet på stav (med kule) må, siden kula sitter fast midt på, være like stor ved A og B, og til sammen lik tyngden av stav + kule. Med andre ord, $N_B = N_A = mg$. Dermed er $W_f = \mu mg\theta d$, og når vi setter dette friksjonsarbeidet lik K_1, finner vi

$$\theta = \frac{3v^2}{14\mu gd}.$$

Innsetting av oppgitte tallverdier gir

$$\theta = \frac{3 \cdot 100}{14 \cdot 0.11 \cdot 9.81 \cdot 0.15} = 132.39,$$

en vinkel som tilsvarer $\theta/2\pi \simeq 21$ hele omdreininger.

(Med den omtrentlige verdien $\beta = 0.4$ i $K_1 = \beta mv^2/2$ blir $\theta = \beta v^2/2\mu gd = 0.4 \cdot 100/2 \cdot 0.11 \cdot 9.81 \cdot 0.15 = 123.56$, som tilsvarer ca 20 hele omdreininger.)

OPPGAVE 3: Uelastisk relativistisk kollisjon (Teller 15%, 6% for *a* og 9% for *b*)

a) Vi har $p = \gamma_0 mv_0$, og med $v_0 = 4c/5$ er $\gamma_0 = (1 - 16/25)^{-1/2} = 5/3$, slik at $p = (5/3)m \cdot 4c/5 = (4/3)mc$. Dvs, $\alpha = 4/3$.

For partikkelen med hastighet $4c/5$ er energien $\gamma_0 mc^2 = (5/3)mc^2$, og for partikkelen som ligger i ro er energien mc^2. I alt $E = (8/3)mc^2$. Dvs, $\beta = 8/3$.

b) Etter kollisjonen er impulsen $\gamma_1 Mv_1$, med $\gamma_1 = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2}$. Energien etter kollisjonen er $\gamma_1 Mc^2$. Med andre ord, $\gamma_1 Mv_1 = 4mc/3$ og $\gamma_1 Mc^2 = 8mc^2/3$. Når vi dividerer disse to ligningene med hverandre, forkortes $\gamma_1 M$ bort, og vi står igjen med $v_1/c^2 = 1/2c$, dvs $v_1 = c/2$. Dermed er $\gamma_1 = (1 - 1/4)^{-1/2} = 2/\sqrt{3}$, slik at massen i slutt-tilstanden blir $M = 8m/3\gamma_1 = 4m/\sqrt{3}$. Og til slutt, kinetisk energi i slutt-tilstanden: $K = (\gamma_1 - 1)Mc^2 = (2/\sqrt{3} - 1) \cdot 4mc^2/\sqrt{3} = (8 - 4\sqrt{3})mc^2/3$.