

Løsningsforslag til øving 11

Oppgave 1

a) Vinkelfrekvensen er (antar matematisk pendel, men det spiller ingen rolle, det er bare avhengigheten av g som teller her) $\omega = \sqrt{g/L}$, så perioden er $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Ved høyde h over havet er tyngdens akselerasjon

$$g(h) = GM/(R + h)^2.$$

Dermed:

$$T(h) = T(0)(1 + h/R).$$

b) Med $h = 630$ m og $R = 6378000$ m blir relativ forsinkelse lik $h/R = 3.14 \cdot 10^{-5}$, dvs absolutt forsinkelse ca 1 minutt.

Oppgave 2

Ved uniform sirkelbevegelse er akselerasjonen ren sentripetalakselerasjon v^2/r , og eneste kraften som virker er gravitasjonskraften $G \cdot Mm/r^2$. N2 gir

$$\Sigma F = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \cdot \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Radien r er avstanden fra jordsentrum, som ved starten A og ved slutten B er lik henholdsvis

$$\begin{aligned} r_A &= R + h_A = 6378 \text{ km} + 8000 \text{ km} = 14378 \text{ km} \\ r_B &= R + h_B = 6378 \text{ km} + 650 \text{ km} = 7028 \text{ km} . \end{aligned}$$

Får ofte bruk for og beregner derfor: $GM = 6.6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2) \cdot 5.974 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 3.9870 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$.

a) Endring i hastighet:

For den videre regning kan det være lurt å beregne hastighetene v_A og v_B separat og ikke bare differansen:

$$\left. \begin{aligned} v_A &= \sqrt{\frac{GM}{r_A}} = \sqrt{\frac{3.9870 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2}{14378 \cdot 10^3 \text{ m}}} = 5265.9 \text{ m/s} \\ v_B &= \sqrt{\frac{GM}{r_B}} = \sqrt{\frac{3.9870 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2}{7028 \cdot 10^3 \text{ m}}} = 7531.9 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\Delta v = v_B - v_A = +2266 \text{ m/s} .}$$

Hastigheten øker altså.

b) Endring i kinetisk energi:

$$\left. \begin{aligned} K_A &= \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m \frac{GM}{r_A} = 6.9325 \cdot 10^{10} \text{ J} \\ K_B &= \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m \frac{GM}{r_B} = 14.183 \cdot 10^{10} \text{ J} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\Delta K = K_B - K_A = +7.254 \cdot 10^{10} \text{ J} .}$$

c) Endring i potensiell energi:

$$\left. \begin{aligned} U_A &= -m \frac{GM}{r_A} = -2 \cdot K_A = -13.865 \cdot 10^{10} \text{ J} \\ U_B &= -m \frac{GM}{r_B} = -2 \cdot K_B = -28.366 \cdot 10^{10} \text{ J} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\Delta U = U_B - U_A = -2 \cdot \Delta K = -14.50 \cdot 10^{10} \text{ J}}}$$

Potensiell energi (relativt ∞) har alltid dobbelt verdi av kinetisk energi. Dette gjelder for alle sirkulære baner i gravitasjonsfelt. Når banen er elliptisk, varierer kinetisk og potensiell energi under omløpet.

d) Endring i totalenergi:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \Delta K - 2 \cdot \Delta K = -\Delta K = \underline{\underline{-7.254 \cdot 10^{10} \text{ J}}}$$

Eller med mer regnearbeid:

$$\begin{aligned} E_A &= K_A + U_A = -\frac{1}{2} m \frac{GM}{r_A} = -6.9325 \cdot 10^{10} \text{ J}, \\ E_B &= K_B + U_B = -\frac{1}{2} m \frac{GM}{r_B} = -14.183 \cdot 10^{10} \text{ J}. \\ \Delta E &= E_B - E_A = -\frac{1}{2} m GM \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \underline{\underline{-7.254 \cdot 10^{10} \text{ J}}}. \end{aligned}$$

En stor porsjon potensiell energi er tapt, halvparten av tapet er overført til kinetisk energi, resten friksjonsarbeid.

Oppgave 3

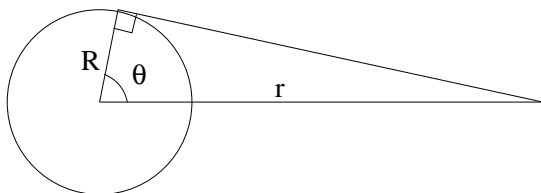
a) Gravitasjonskraften må være lik sentripetalkraften ved omløpstid $T = 24 \text{ h} = 24 \cdot 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$:

$$\begin{aligned} \Sigma F = ma = m\omega^2 r &\Rightarrow G \frac{mM}{r^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r \\ r = \left(GM \cdot \frac{T^2}{(2\pi)^2} \right)^{1/3} &= \left(6.6742 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5.9742 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \frac{(86400 \text{ s})^2}{(2\pi)^2} \right)^{1/3} = 42246 \text{ km}, \end{aligned}$$

som er snaut 7 jordradier. Høyden over jordoverflaten er da

$$h = r - R = 42246 \text{ km} - 6378 \text{ km} = \underline{\underline{35868 \text{ km}}}.$$

b)

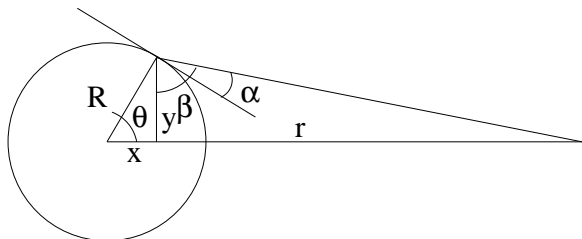


$$\cos \theta = R/r = 6378.1/42246 = 0.15098$$

$$\theta = 81.32^\circ = \underline{\underline{81^\circ 19'}}.$$

$81^\circ 19'$ er like nord for nordspissen av Svalbard, så hele den befolkede verden vil ha geostasjonære satellitter tilgjengelig, med mindre et fjell skjuler sikten mot sør.

c)



I figuren er $x = R \cos \theta$ og $y = R \sin \theta$. La $\beta = \theta + \alpha$ være vinkelen mellom den vertikale linjen y på figuren og siktlinja til satellitten. Trondheims breddegrad er $\theta = 63^\circ 26' = 63.43^\circ$. Da er

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{r - x}{y} = \frac{r/R - \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{42246/6378.1 - \cos 63.43^\circ}{\sin 63.43^\circ} = 6.906, \end{aligned}$$

slik at $\beta = 81.76^\circ$. Da er den søkte vinkelen over horisonten

$$\alpha = \beta - \theta = 81.76^\circ - 63.43^\circ = 18.33^\circ = \underline{18^\circ 20'}.$$

Oppgave 4

a) Total energi ved jordens overflate er

$$E_J = U_J + K_J = -\frac{GmM_J}{R_J} + \frac{1}{2}mv_J^2.$$

Utenfor jordens gravitasjonsfelt, dvs for $r \rightarrow \infty$, er $U = 0$. Minste kinetiske energi der ute er $K = 0$. Total energi E må derfor være minst lik null, slik at

$$v_J \geq \sqrt{\frac{2GM_J}{R_J}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.6742 \cdot 10^{-11} \cdot 5.974 \cdot 10^{24}}{6378 \cdot 10^3}} \simeq 11.2 \text{ km/s.}$$

b) Total energi ved jordens overflate er nå

$$E_J = -\frac{GmM_S}{R_{SJ} + R_J} - \frac{GmM_J}{R_J} + \frac{1}{2}mv_S^2.$$

Kravet $K \geq 0$ når $r \rightarrow \infty$ gir nå

$$v_S \geq \sqrt{\frac{2GM_S}{R_{SJ} + R_J} + \frac{2GM_J}{R_J}},$$

som med tallverdier innsatt gir ($R_{SJ} = 1.5 \cdot 10^{11}$ m) $v_S \geq 43.5$ km/s. Hvis vi ser bort fra bidraget $2GM_J/R_J$ i uttrykket for v_S , får vi 42.1 km/s, en feil på ca 3%.

Oppgave 5

a) Av symmetrigrunner må $\mathbf{g}(y)$ ha retning normalt på staven og peke mot staven (siden gravitasjonskraften er tiltrekkende). Vi kan derfor konsentrere oss om y -komponenten av gravitasjonsfeltet. Ulike deler av staven er i ulik avstand fra punktet (P) der $\mathbf{g}(y)$ skal bestemmes. Vi tenker oss derfor at vi deler opp staven i (uendelig) mange små biter, med lengde dx , masse $dm = Mdx/L$, og posisjon x i stavens lengderetning. Avstanden fra et slik masseelement til P er $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Bidraget til \mathbf{g} fra dm i posisjon x er gitt ved gravitasjonsloven, $d\mathbf{g} = Gdm/r^2$ (siden et slik infinitesimalt masseelement kan betraktes som en punktmasse). Vi er kun interessert i den komponenten av dette bidraget som har retning normalt inn mot staven. Derfor må vi multiplisere med $\cos \alpha$, der α er vinkelen mellom "loddlinjen" fra P mot staven og linjen fra P til dm :

$$dg_y = dg \cos \alpha = \frac{G dm \cos \alpha}{r^2} = \frac{GM dx \cos \alpha}{Lr^2}.$$

Vi har at $x = y \tan \alpha$, som betyr at $dx = y d\alpha / \cos^2 \alpha = r^2 d\alpha / y$. Innsetting av dette for dx i dg_y gir $dg_y = (GM/Ly) \cdot \cos \alpha d\alpha$. Det totale gravitasjonsfeltet i P blir $g = \int dg_y$, dvs vi legger sammen bidragene fra alle stavens bestanddeler. Integrasjonsgrensene for α må velges slik at vi får med bidragene fra hele staven. Med andre ord, vi må integrere over α fra $-\phi$ til ϕ , der $\sin \phi = (L/2)/R = (L/2)/\sqrt{y^2 + (L/2)^2}$:

$$g(y) = \frac{GM}{Ly} \int_{-\phi}^{\phi} \cos \alpha d\alpha = \frac{GM}{Ly} \cdot 2 \sin \phi = \frac{GM}{y\sqrt{y^2 + L^2/4}}.$$

b) Strategien blir den samme som i a). Vi holder oss til posisjoner $x > L/2$, dvs til høyre for stavens høyre ende. (Staven ligger mellom $-L/2$ og $L/2$.) Av symmetrigrunner må feltet her peke i negativ x -retning. Vi ser på absoluttverdien av bidraget til $g(x)$ fra et lite masseelement i posisjon x' , med lengde dx' og dermed masse $dm = dx' M/L$. Avstanden fra dm til x er $r = x - x'$. Dermed er $dg = dg_x = G dm/r^2 = (GM/L) dx' / (x - x')^2$. Her må vi integrere fra $x' = -L/2$ til $x' = L/2$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{GM}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{(x - x')^2} \\ &= \frac{GM}{L} \left[\frac{1}{x - x'} \right]_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{GM}{L} \left(\frac{1}{x - L/2} - \frac{1}{x + L/2} \right) \\ &= \frac{GM}{L} \frac{(x + L/2) - (x - L/2)}{(x + L/2)(x - L/2)} \\ &= \frac{GM}{L} \frac{L}{x^2 - L^2/4} \\ &= \frac{GM}{x^2 - L^2/4} \end{aligned}$$

c) Dersom observasjonspunktet P er veldig langt unna staven, slik at stavens lengde L er mye mindre enn henholdsvis avstanden y og x i oppgave a) og b), vil staven praktisk talt se ut som en punktmasse plassert i origo, med masse M . Da vet vi at gravitasjonsfeltet er henholdsvis $g(y) = GM/y^2$ og $g(x) = GM/x^2$. Vi ser at uttrykkene vi har regnet ut reduseres til nettopp dette når hhv $y \gg L$ og $x \gg L$.