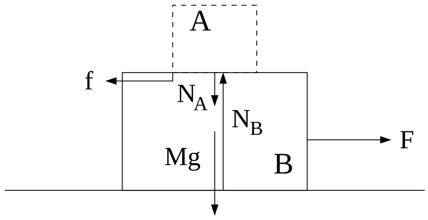
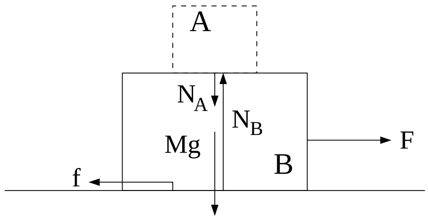
FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2014.

Løsningsforslag til øving 3

Oppgave 1



a) De vertikale krefter på B er tyngdekraft, Mg, normalkraft $N_A = mg$ fra A pga tyngden til A, og normalkraft N_B fra underlaget og oppover, $N_B = N_A + Mg = (m + M)g$. (Alle krefter gitt som absoluttverdi.) De horisontale krefter på B er trekkraften F og friksjonskraften f mellom A og B, som på B virker motsatt av trekkraften.



b) De vertikale kreftene er som i *a*). Når klossene beveges med konstant fart, er nettokraften på kloss A (og kloss B) lik null, dvs ingen horisontal (friksjons)kraft mellom A og B. Med friksjon mellom B og underlaget blir det en horisontalkraft f på B ved underlaget som nå er motsatt lik trekkraften, $f = F$.

Akselerasjonen i *a*) kan beregnes ved å betrakte begge klossene samlet: A og B har samme akselerasjon a, og totalkraften er F (friksjonskreftene mellom A og B er ikke ytre krefter; de er indre krefter i systemet A+B, motsatt rettet og like store i absoluttverdi (N3!), og bidrar ikke til totalkraften F). Newtons 2. lov (N2) gir $\underline{a = F/(m + M)}$.

Alternativt kan akselerasjonen i *a*) beregnes fra N2 på kloss B alene: $F - f = Ma$. Friksjonskraften f er eneste horisontalkraft på A (rettet mot høyre, dvs samme fortegn som F) og bestemmes ved N2 på A: $f = ma$. Dette gir som over $\underline{a = F/(m + M)}$.

Oppgave 2

a) Null nettokraft både tangentielt med og normalt på taket:

$$
\begin{aligned}
N &= mg \sin \theta, \\
f &= mg \cos \theta.
\end{aligned}
$$

Her er θ vinkelen mellom horisontalplanet og posisjonsvektoren din, relativt halvkulas sentrum, og f og N er friksjonskraft og normalkraft, som vanlig. Rett før du begynner å gli er $f = \mu_s N$, som med ligningene ovenfor gir

$$\mu_s = \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

dvs

$$\theta = \arctan(1/\mu_s).$$

Du kan dermed gå avstanden (buelengden)

$$s = R(\pi/2 - \theta) = 18.5\text{m}.$$

Riktig svar: B.

b) Så lenge du har kontakt med taket er akselerasjonen inn mot halvkulas sentrum lik v^2/R. Krefter i denne retningen er $mg\sin\theta$ inn mot sentrum og N bort fra sentrum. Dermed, med N2:

$$mg\sin\theta - N = mv^2/R.$$

Bevaring av mekanisk energi (jf forelesning) gir

$$v(\theta) = \sqrt{2gR(1-\sin\theta)},$$

som innsatt over gir

$$N = 3mg\sin\theta - 2mg.$$

Null normalkraft betyr altså at

$$\sin\theta = 2/3,$$

dvs avstanden fra toppen av taket er

$$s = R(\pi/2-\theta) = 33.6\,\mathrm{m}.$$

Riktig svar: C.

Oppgave 3

a) Energibevarelse $E_A = E_B$ gir

$$\begin{aligned} U_A + K_A &= U_B + K_B \\ mgL + 0 &= mg\cdot(2r) + \frac{1}{2}mv^2 \\ 2gL &= 4gr + v^2\,. \end{aligned}$$

Innsetting av $r = L - x$ i ligningen gir

$$v = \sqrt{2gL - 4g(L-x)} = \underline{\sqrt{2g(2x-L)}}\,. \tag{1}$$

b) Snorkraften S og tyngden virker på kula. Vi bruker Newtons 2. lov og uttrykket for sentripetalakselerasjonen:

$$S + mg = ma = \frac{mv^2}{r} \quad\Rightarrow\quad S = \frac{mv^2}{r} - mg\,. \tag{2}$$

Snora er stram for $S > 0$, som fra (2) gir kravet $v^2 > gr$. Vi bruker så uttrykket for v i (1) og at $r = L - x$:

$$2g(2x-L) > g(L-x) \quad\Rightarrow\quad 5x > 3L \quad\Rightarrow\quad \underline{x > \frac{3}{5}L}\,.$$

Oppgave 4.

ϕ	$S_{\max}/g$ (g)	μ
0	185	
$\pi/2$	240	0.166
π	300	0.154
$3\pi/2$	440	0.184
2π	600	0.187
$5\pi/2$	800	0.186
3π	1000	0.179
$7\pi/2$	1100	0.162
4π	1400	0.161

Tabell: Maksimal snorkraft $S_{\max}$ og statisk friksjonskoeffisient μ, med snor surret en vinkel ϕ rundt plastrøret.

Fra det oppgitte uttrykket for $S_{\max}(\phi)$ har vi

$$\mu = \frac{1}{\phi} \ln \frac{S_{\max}(\phi)}{S_{\max}(0)}$$

når $S_{\max}(\phi)$ er største tillatte snorkraft for å holde loddet med masse $m = S_{\max}(0)/g$ i likevekt (dvs i ro). Middelverdien av μ blir

$$\overline{\mu} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} \mu_i \simeq 0.1724,$$

standardavviket blir

$$\Delta\mu = \sqrt{\frac{1}{7} \sum_{i=1}^{8} (\mu_i - \overline{\mu})^2} \simeq 0.0132,$$

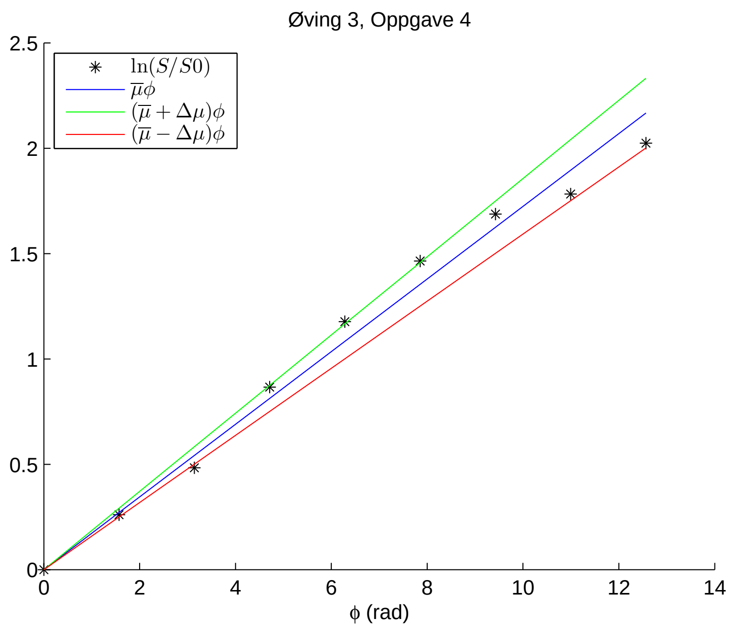
mens standardfeilen blir

$$\Delta\overline{\mu} = \frac{\Delta\mu}{\sqrt{8}} \simeq 0.0047.$$

Dermed:

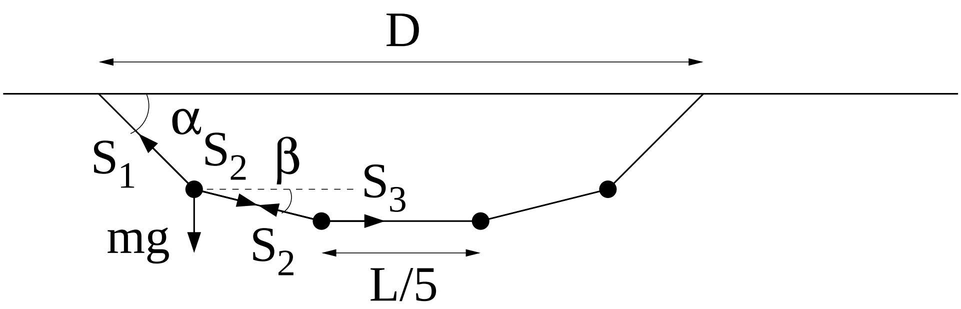
$$\mu = 0.172 \pm 0.005.$$

Vi plotter målepunktene for $\ln[S_{\max}/S_{\max}(0)]$ sammen med de rette linjene $\mu\phi$, for $\mu = \overline{\mu}$ samt $\mu = \overline{\mu} \pm \Delta\mu$:



Matlabprogrammet friksjon.m regner ut $\overline{\mu}$, $\Delta\mu$ og $\Delta\overline{\mu}$, og lager figuren ovenfor. Vi ser at 3 av de 8 målepunktene (37%) ligger utenfor intervallet $[\overline{\mu} - \Delta\mu, \overline{\mu} + \Delta\mu]$, dvs 63% ligger innenfor. Dette er omtrent som forventet (ca 68%).

Oppgave 5.



Vi kaller snordraget i 1., 2. og 3. snorbit regnet fra et festepunkt for hhv S_1, S_2 og S_3 (se figuren over). N1 for 1. og 2. masse, horisontalt og vertikalt, gir da i alt

$$\begin{aligned} S_1 \cos\alpha &= S_2 \cos\beta \\ S_1 \sin\alpha &= S_2 \sin\beta + mg \\ S_2 \cos\beta &= S_3 \\ S_2 \sin\beta &= mg \end{aligned}$$

Ligning nr 5 uttrykker at horisontale forflytninger langs snora summerer seg til D:

$$\frac{L}{5}\left(1 + 2\cos\beta + 2\cos\alpha\right) = D.$$

Kombinasjon av 2. og 4. ligning gir $S_1 \sin\alpha = 2S_2 \sin\beta$, som kominert med 1. ligning gir

$$\tan\alpha = 2\tan\beta \quad \text{dvs} \quad \beta = \arctan(\frac{1}{2}\tan\alpha).$$

Bruker vi $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ og tilsvarende med β, finner vi

$$\cos\beta = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}.$$

Dette setter vi inn i ligning nr 5 ovenfor og får

$$\frac{L}{5}\left(1 + \frac{4\cos\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}} + 2\cos\alpha\right) = D.$$

For å kunne bruke det utdelte Matlab-programmet og bestemme α numerisk (for gitte verdier av L og D, selvsagt), må denne ligningen omformes til $x = f(x)$, med $x = \cos\alpha$. I første omgang ser det meget naturlig ut å multiplisere med $5/L$ og trekke fra 1 på begge sider. Hvis vi så definerer $\gamma = (5D/L - 1)/2$, har vi (minst) tre åpenbare muligheter:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\gamma}{1 + 2/\sqrt{1+3x^2}}, \\ x &= \gamma - \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}, \\ x &= \frac{1}{2}\sqrt{1+3x^2}\,(\gamma - x)\,. \end{aligned}$$

Algoritmen (se f.eks. Fixed-point iteration på wikipedia) i klessnor.m fungerer fint med alle disse tre. Til slutt kan vi gå tilbake til de opprinnelige ligningene og løse ut for S_1, S_2 og S_3 mhp x. Vi finner:

$$\frac{S_1}{mg} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$
\begin{aligned}
\frac{S_2}{mg} &= \sqrt{\frac{1+3x^2}{1-x^2}}, \\
\frac{S_3}{mg} &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}
$$

Er disse uttrykkene rimelige? Vel, vi ser for det første at når $x \to 1$, dvs $\alpha \to 0$, dvs horisontal snor, så blir alle snordrag uendelig store. Ikke urimelig. Videre ser vi at $S_1 > S_2 > S_3$ hvis $x < 1$. Ved litt ettertanke heller ikke urimelig.

I programmet

`klessnor_los.m`

bestemmes begge vinkler og de tre snordragene, med $D = 0.9L$.

Til slutt kan det jo bemerkes at ei homogen snor, dvs med konstant massetetthet (masse pr lengdeenhet), vil henge med form som en hyperbolsk cosinus. Ei slik homogen snor skulle tilsvare at vi hengte N like store masser på snora, i innbyrdes avstand $L/(N+1)$, og lot $N \to \infty$. Det overlates til den enkelte å studere dette nærmere, gjerne både analytisk og numerisk.