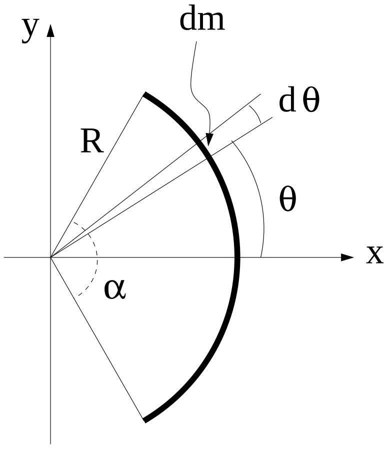
FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2014.

Løsningsforslag til øving 4

Oppgave 1



a) Massen til del av bøylen innenfor vinkelelementet $d\theta$ er

$$dm = \lambda dl = \lambda R d\theta,$$

der $\lambda = M/2\alpha R$ er bøylens masse pr lengdeenhet (kg/m). Men i slike oppgaver kan det være like greit å ikke innføre massetettheter, idet vi kan uttrykke massen i vinkelelementet $d\theta$ som

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{d\theta}{2\alpha}.$$

Med denne dm og bruk av $x = R\cos\theta$ blir tyngdepunktets x-verdi

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M}\int_{\text{legeme}} x\; dm = \frac{1}{M}\cdot R \cdot \frac{M}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\; d\theta \\ &= \frac{R}{2\alpha}\left[\sin\alpha - \sin(-\alpha)\right] = \underline{R\frac{\sin\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y-verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

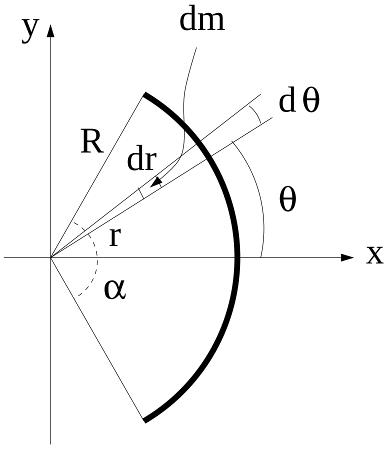
$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \to 0$ gir $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$ og $X = R$, som ventet for en liten masse samlet i $x = R$.

b) Massen til en infinitesimal del av sektoren innenfor vinkelelementet $d\theta$ og radius dr er

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\alpha R^2}.$$

Med denne dm og bruk av $x = r\cos\theta$ blir tyngdepunktets x-verdi



$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M}\int_{\text{sektor}} x\; dm = \frac{1}{M}\cdot\frac{M}{\alpha R^2}\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\int_{r=0}^{R} r^2\cos\theta\; d\theta dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2}\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\; d\theta\int_{r=0}^{R} r^2 dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2}\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R \\ &= \underline{\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y-verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

Alternativt kan du bruke resultatet fra a) ved å betrakte sirkelsektoren som en sum av bøyler med radius fra 0 til R. En bøyle med radius r har da $X = r\,(\sin\alpha)/\alpha$ og masse (sammenlign med det som er gjort ovenfor)

$$dm = M \cdot \frac{dA_{\text{bøyle}}}{A} = M \cdot \frac{r \cdot 2\alpha \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2} = M \cdot \frac{2r \cdot dr}{R^2},$$

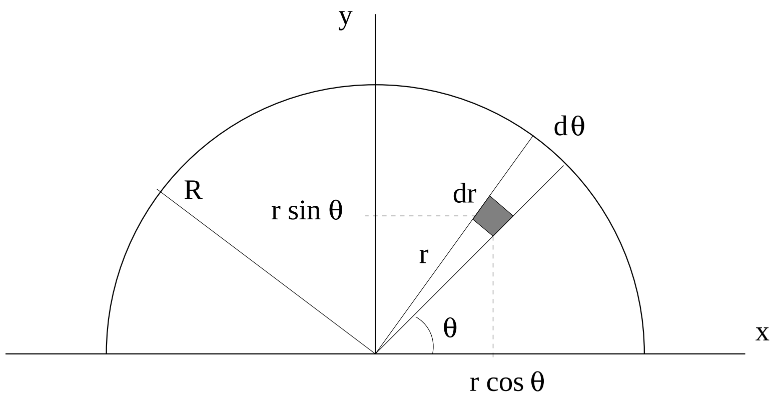
og vi får

$$X = \frac{1}{M}\int_{\text{alle bøyler}} X\,dm = \frac{1}{M}\int_0^R r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,M\frac{2r\cdot dr}{R^2} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{2}{R^2}\int_0^R r^2\,dr = \underline{\frac{2}{3}\,R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}}.$$

$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \to 0$ gir $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$ og $X = 2R/3$, som vel er rimelig for en meget smal sirkelsektor.

c) Av symmetrigrunner er $X_{CM} = Z_{CM} = 0$. Rotasjon av flateelementet dA om y-aksen i figuren nedenfor gir ring med volum $dV = 2\pi r\cos\theta \cdot r\,d\theta\,dr$:



Denne ringen har masse $dm = M dV/V$, der M er total masse og $V = 2\pi R^3/3$ totalt volum for halvkula. Dermed:

$$\begin{aligned} Y_{CM} &= \frac{1}{M}\int y\,dm \\ &= \frac{3}{2\pi R^3}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{R} r\sin\theta \cdot 2\pi r^2 dr\cos\theta d\theta \\ &= \frac{3}{R^3}\left(|_0^R r^4/4\right)\cdot\left(|_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \\ &= \frac{3R}{8}. \end{aligned}$$

Oppgave 2.

a) **C**. Graf 4 er åpenbart mulig: Klossen glir oppover med konstant (negativ) akselerasjon og blir liggende i ro dersom friksjonen mot underlaget er stor nok. Alternativt glir den ned igjen, igjen med konstant akselerasjon, men nå med *mindre* akselerasjon, siden både friksjonskraften og tyngdens komponent tangentielt med skråplanet virker mot bevegelsen når klossen er på vei opp (mens bare friksjonskraften virker mot bevegelsen hvis klossen er på vei ned). Dermed er også graf 2 en mulighet.

b) **D**. Mekanisk energi er bevart, så hastigheten er mindre på toppen enn ved bunnen. Dette er nok til å fastslå at D er riktig figur, siden sentripetalakselerasjonen er v^2/r. På høyre og venstre side har vi i tillegg baneakselerasjonen g rettet nedover, som gir total akselerasjon på skrå nedover og inn mot midten.

c) **C**. Impulsbevarelse gir $2mv_0 = 5mv$, dvs $v = 2v_0/5$. Energitapet er dermed $K_0 - K = (1/2)2mv_0^2 - (1/2)5m(2v_0/5)^2 = 3mv_0^2/5$.

Oppgave 3.

a) Rakettligningen:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + u\frac{dm}{dt}.$$

Vi ganger ligningen med dt/m og integrerer, fra 0 til v for v, fra 0 til t for t, og fra m_0 til m for m:

$$\int_0^v dv = -g\int_0^t dt + u\int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

som gir

$$v(t) = -gt + u\ln\frac{m}{m_0} = -u\ln\frac{m_0}{m} - gt.$$

b) Må ha skyvkraft minst like stor som tyngdekraften $m_0 g = 2.98 \cdot 10^7$ N. Her er skyvkraften lik $u\beta = 3.40 \cdot 10^7$ N, så raketten *vil* lette fra bakken. Drivstoffmassen ved avreise er $m_d = -\beta t_f = 1.98 \cdot 10^6$ kg. Raketten uten drivstoff har masse $m_f = m_0 - m_d = 1.06 \cdot 10^6$ kg.

c) Fra rakettligningen har vi umiddelbart

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -g + \frac{u}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{u\beta}{m} - g.$$

Med konstant drivstoff-forbruk har vi $m = m_0 + \beta t$, og dermed $a(t)$ som oppgitt. Ved $t = 0$: $a(0) = u\beta/m_0 - g = 1.39$ m/s^2. Ved $t = t_f$: $a(t_f) = u\beta/m_f - g = 22.3$ m/s^2.

d) Vi kan skrive

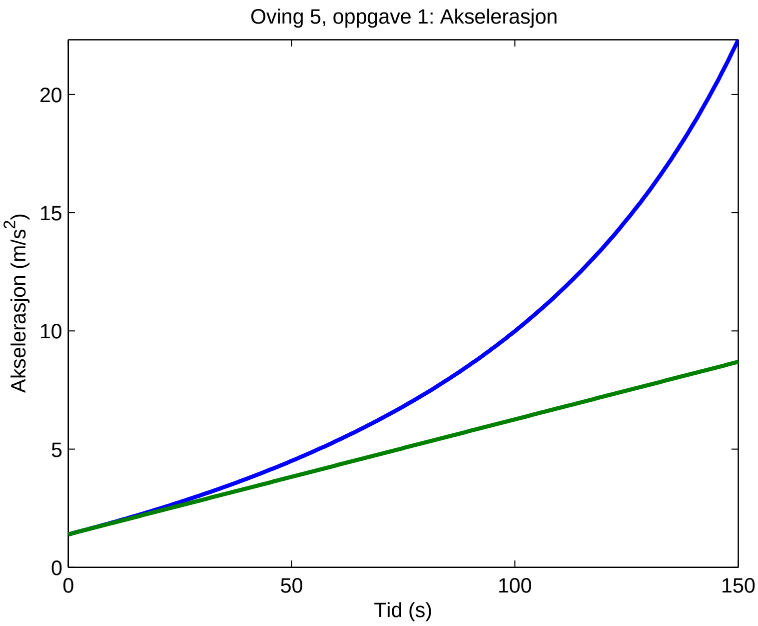
$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0}\frac{1}{1 + \beta t/m_0} - g.$$

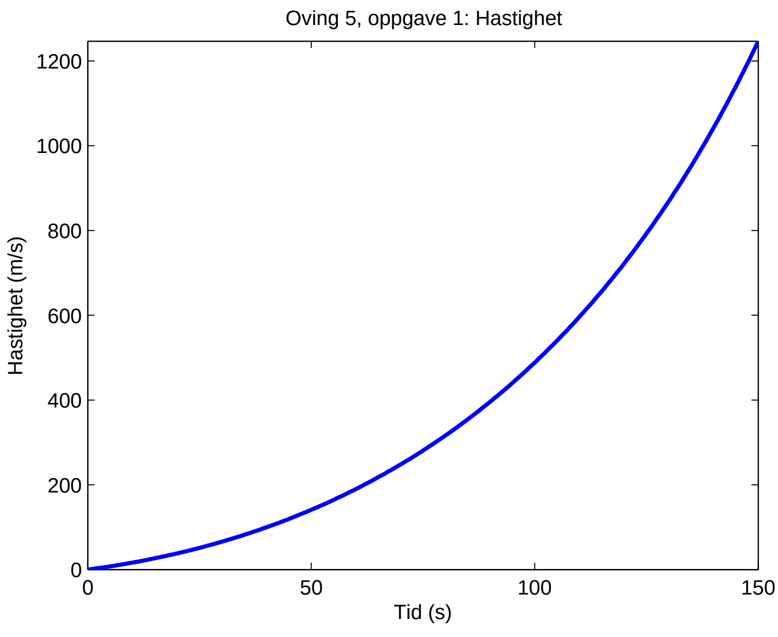
Hvis $t \ll m_0/(-\beta)$, så er $x = -\beta t/m_0 \ll 1$. Dermed er

$$a(t) \simeq a_{\text{lin}}(t) = \frac{u\beta}{m_0}\left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right) - g = a(0) - \frac{u\beta^2}{m_0^2}\,t,$$

som oppgitt.

Figurer produsert med Matlab-programmet rakettlosning.m for hhv akselerasjon og hastighet som funksjon av t:





På øyemål anslår vi at den lineære tilnærmelsen til $a(t)$ er god omtrentlig de første 20 sekundene.

e) Tilbakelagt distanse er gitt ved

$$h(t) = \int_0^t v(t)dt.$$

Vi har at

$$\int \ln x dx = x \ln x - x,$$

siden den deriverte av høyre side her gir tilbake $\ln x$. Litt fundering på hvordan riktige konstanter skal velges her og der gir da

$$h(t) = u\frac{m_0 + \beta t}{\beta} \ln \frac{m_0 + \beta t}{m_0} - ut - \frac{1}{2}gt^2,$$

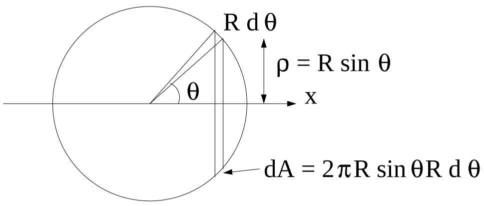
og setter vi inn $t = t_f = 150$ s her, finner vi at $h(t_f) = 58353$ m $\simeq 58.4$ km.

Forholdet mellom $g(0)$, dvs g ved jordoverflaten, og $g(h)$, dvs g i høyden h over bakken, er

$$\frac{g(0)}{g(h)} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2.$$

Setter vi inn $R = 6.37 \cdot 10^3$ km og $h = h_f = 58.4$ km, finner vi at dette forholdet blir ca 1.02. Med andre ord, vi gjør ikke større feil enn et par prosent ved å bruke samme verdi 9.81 m/s^2 for g for hele distansen.

Oppgave 4.



Vi setter $dm = M \cdot dA/A$, med $A = 4\pi R^2$ = arealet av hele kuleskallet og $dA = 2\pi\rho \cdot Rd\theta = 2\pi R \sin\theta \cdot Rd\theta$ = arealet av en smal ring med omkrets $2\pi R \sin\theta$ og bredde $Rd\theta$. Her er θ vinkelen mellom (rotasjons-)aksen og linjen fra kuleskallets sentrum ut til den smale ringen, se figur. Dermed:

$$I_0 = \int_0^\pi (R\sin\theta)^2 \cdot M \cdot \frac{2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}MR^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta.$$

Vi bruker tipset gitt i oppgaven og finner

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) = |_0^\pi \left(\frac{\cos 3\theta}{12} - \frac{3\cos\theta}{4}\right) = \frac{4}{3},$$

slik at

$$I_0 = \frac{2}{3}MR^2.$$

Vi betrakter ei kompakt kule som mange tynne kuleskall utenpå hverandre, hver med treghetsmoment $dI = 2r^2dm/3$, radius r, masse $dm = M \cdot dV/V$, der $V = 4\pi R^3/3$ er kulas totale volum, og $dV = 4\pi r^2 dr$ er volumet til et kuleskall med radius r og tykkelse dr. Dermed:

$$I_0 = \int dI = \int_0^R \frac{2}{3}r^2 \cdot M \cdot \frac{4\pi r^2 dr}{4\pi R^3/3} = \frac{2M}{R^3}\int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5}MR^2.$$

Alternativ metode: La x-aksen være rotasjonsaksen og del opp kula i tynne skiver med tykkelse dx og radius $\sqrt{R^2 - x^2}$, og dermed volum $dV = dx \cdot \pi(R^2 - x^2)$ og masse $dm = MdV/V = M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)/(4\pi R^3/3)$. Treghetsmomentet til ei slik skive er $dI = dm \cdot (R^2 - x^2)/2$, slik at kulas treghetsmoment blir

$$\begin{aligned}
I &= \int dI \\
&= \frac{1}{2}\int dm \cdot (R^2 - x^2) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^R \frac{M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)}{4\pi R^3/3} \cdot (R^2 - x^2) \\
&= \frac{3M}{4R^3}\int_0^R (R^4 - 2R^2x^2 + x^4)dx \\
&= \frac{2}{5}MR^2
\end{aligned}$$

Oppgave 5.

a) Bordtennisball: $m = 2.7$ g $= 0.0027$ kg og $r = 20$ mm $= 0.020$ m. Dermed: $I_0 = 2mr^2/3 = 7.2 \cdot 10^{-7}$ kg m^2. Riktig svar: B.

b) Kule, friidrett, menn: $M = 7.26$ kg og $R = 60$ mm $= 0.060$ m. (Helt presist: Mellom 55 og 65 mm.) Dermed: $I_0 = 2MR^2/5 = 0.010$ kg m^2. Riktig svar: D.

Oppgave 6.

a) $I_0 = MR^2/2 = 500 \cdot 0.5^2/2 = 500/8 = 62.5$ kg m^2. Riktig svar: A.

b) 60 sekunder pr minutt og 2500 omløp pr minutt gir $T = 60/2500 = 0.024$ s $= 24$ ms. Riktig svar: C.

c) $\omega = 2\pi/T = 2\pi/0.024 = 262$ s^{-1}. Riktig svar: D.

d) $K = I_0\omega^2/2 = 62.5 \cdot 262^2/2 = 2.14$ MJ, som omregnet (1 kWh $= 3.6$ MJ) gir 0.59 kWh. Riktig svar: B.