FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2014.

Løsningsforslag til øving 7

Oppgave 1

a) Vi antar at Hookes lov, $F = -kx$, gjelder for fjæra. Newtons andre lov gir da

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

eller

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

med $\omega_0^2 = k/m$. Ligningen har løsning $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$, som gitt i oppgaveteksten. Klossen svinger altså med vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{k/m}$, og dermed med periode $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$. Riktig svar: C.

b) og *c*) Amplituden A og fasekonstanten ϕ fastlegger vi ved å bruke de oppgitte initialbetingelsene $x(0) = x_0$ og $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$. Vi har

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

slik at

$$x_0 = A\cos\phi$$

og

$$v_0 = -\omega_0 A\sin\phi$$

Herfra er det flere mulige veier å gå. Vi kan for eksempel dele disse to ligningene med hverandre, som gir

$$\phi = -\arctan\frac{v_0}{x_0\omega_0}$$

og

$$A = \frac{x_0}{\cos\arctan v_0/x_0\omega_0}.$$

Alternativt kan vi kvadrere de to ligningene og legge dem sammen:

$$1 = \sin^2\phi + \cos^2\phi = \frac{v_0^2}{\omega_0^2 A^2} + \frac{x_0^2}{A^2}$$

som gir

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} = x_0\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}$$

og deretter

$$\phi = \arccos\frac{x_0}{A} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}}.$$

Altså er både A og B riktige svar på oppgavene *b*) og *c*), dvs C er riktig svar.

d) Siden vi ikke har noe demping i systemet, er den totale energien E bevart. (Dvs: Vi har et *konservativt* system.) Da kan vi beregne energien ved et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel ved maksimalt utsving, der $x = x_{\max} = A$ og $v = 0$:

$$E = E_p^{\max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\left(x_0^2 + mv_0^2/k\right) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Dette gjenkjenner vi som summen av potensiell og kinetisk energi ved $t = 0$, $E_{p0} + E_{k0}$, hvilket jo også må tilsvare den totale energien. Riktig svar: C.

e) Skriver vi løsningen på formen $x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$, har vi

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 B\sin\omega_0 t + \omega_0 C\cos\omega_0 t$$

og dermed, ved hjelp av $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$,

$$B = x_0 \quad \text{og} \quad C = v_0/\omega_0$$

Riktig svar: B.

f) Maksimalt utsving:

$$x_{\max} = A = x_0\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2} = x_0\sqrt{1 + E_{k0}/E_{p0}}$$

Maksimal hastighet:

$$v_{\max} = \omega_0 A = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_0^2 + mv_0^2/k\right)} = v_0\sqrt{1 + kx_0^2/mv_0^2} = v_0\sqrt{1 + E_{p0}/E_{k0}}$$

Med oppgitte tallverdier:

$$E_{p0} = 0.5 \cdot 10 \cdot 0.010^2 = \frac{1}{2000} \quad , \quad E_{k0} = 0.5 \cdot 0.100 \cdot 0.10^2 = \frac{1}{2000}$$

begge i enheten J, ettersom vi kun har brukt SI–enheter underveis. Følgelig er $x_{\max} = \sqrt{2}x_0 \simeq 1.4$ cm og $v_{\max} = \sqrt{2}v_0 \simeq 14$ cm/s. Riktig svar: A.

g) Bevegelsesligning for klossen:

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

Her har vi valgt positiv y-retning nedover. Uten tyngdefelt til stede ($g = 0$) er klossens likevektsposisjon $y = 0$. I tyngdefeltet bestemmes den nye likevektsposisjonen Δy ved å sette total kraft lik null, følgelig

$$\begin{aligned} -k\Delta y + mg &= 0 \\ \Delta y &= mg/k \end{aligned}$$

Med ny posisjonsvariabel

$$z = y - \Delta y$$

får vi bevegelsesligningen

$$m\ddot{z} = -k(z + \Delta y) + mg = -kz$$

som betyr at klossen vil svinge harmonisk med vinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ omkring likevektsposisjonen $z = 0$, dvs $y = \Delta y = mg/k$. (Med tallverdiene fra oppgave 1 har vi $\Delta x = 0.100 \cdot 9.8/10 = 9.8\,\text{cm}$.) Riktig svar: A.

h) Fra figuren ser vi f.eks. at $x(0) = 1$ og $x(5T) = 0.5$, der T er svingningens periode. Dermed:

$$\begin{aligned} e^{-5T/\tau} &= e^{-5\cdot 2\pi/\omega\tau} = 0.5 \\ \Rightarrow \frac{10\pi}{\omega\tau} &= \ln 2 \\ \Rightarrow \omega\tau &= 45 \end{aligned}$$

Riktig svar: D.

i) Med utsving x fra likevektsstilling er kraften på massen m de to fjærkreftene $-k_1x$ og $-k_2x$. N2 gir svingeligningen

$$-k_1x - k_2x = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_1}{m}\right)x = 0\,.$$

Sammenligning med "standardligningen" $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \text{alts} \quad \underline{\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}\,.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ viser også at effektiv fjærstivhet for parallellkoblede fjærer er $k = k_1 + k_2$. Riktig svar: C.

j) Når m forskyves x mot høyre, strekkes fjærene x_1 og x_2, og slik at x_1 og x_2 er forskjellige dersom $k_1 \neq k_2$. Kraften F på massen m forplanter seg gjennom begge fjærene med samme strekk (N3 og masseløse fjærer). Dermed er $F = -k_1x_1 = -k_2x_2$, som gir $x = x_1 + x_2 = -\left(1/k_1 + 1/k_2\right)F$. Dermed er kraften som virker på klossen lik

$$F = -\frac{1}{1/k_1 + 1/k_2}x = -\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x$$

og N2 gir

$$-\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x = m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}x = 0\,.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{(k_1 + k_2)m}{k_1k_2} = \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2}\,, \quad \text{alts} \quad \underline{\omega = \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}}.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ viser også at effektiv fjærstivhet for seriekoblede fjærer er $k = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$. Riktig svar: B.

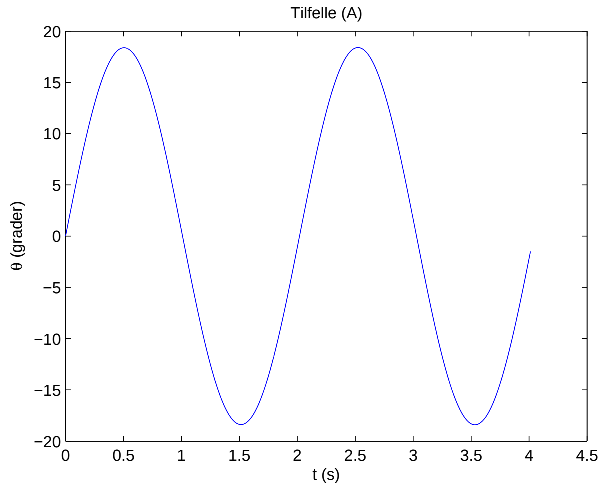
k) Med utsving x fra likevektsstilling vil høyre fjær k_2 presses sammen x og gi en kraft $-k_2x$ mot venstre på massen. Venstre fjær vil strekkes x og gi en kraft $-k_1x$ mot venstre. Kreftene er altså de samme som i *a*), og $\underline{\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$. Riktig svar: C.

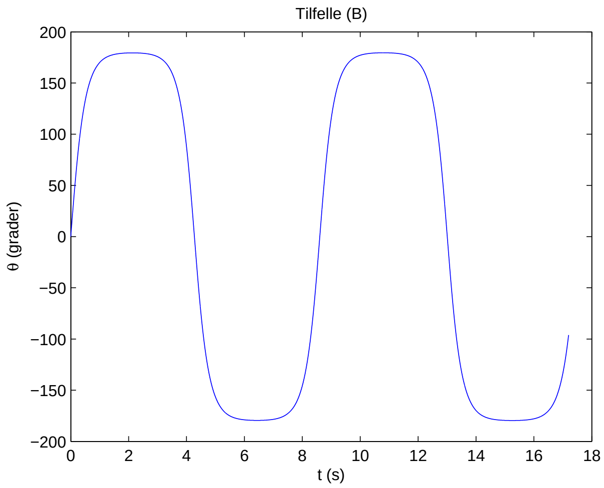
Oppgave 2

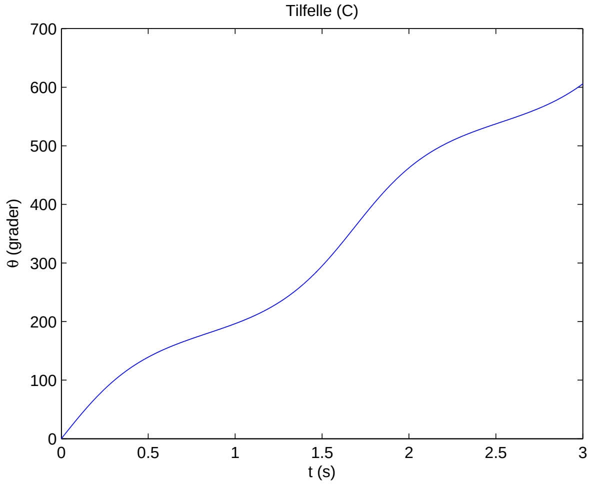
Forslag til fungerende program er `pendel_los.m`. Vi kjører dette programmet (med $g = 9.81$ m/s^2 og $L = 1$ m) for verdier av $v_0 = v(1)$ lik f.eks 1.0 (A; lite utsving), 6.2641 (B; svinger nesten opp til toppen) og 6.5 m/s (C; svinger rundt og rundt). Vi ser da at svingningen blir harmonisk i det første tilfellet, at svingeperioden blir lang og at svingningen blir langt fra harmonisk i det andre tilfellet, og endelig at vinkelen bare øker monotont i det tredje tilfellet. En enda større v_0 ville ha gitt en bortimot lineær funksjon av tiden t. Mekanisk energi pr masseenhet er

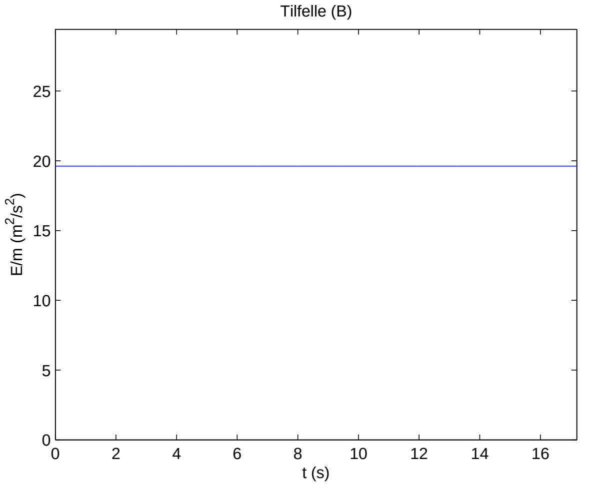
$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}v^2 + gL(1 - \cos\theta).$$

Plotting av denne størrelsen (D) viser at den er konstant.









Plotting av svingeperioden T som funksjon av v_0 viser at denne er praktisk talt konstant, og omtrent lik 2 s, så lenge maksimalt vinkelutslag $\theta_{\max}$ er lite. Når $\theta_{\max}$ blir større, ser vi at T begynner å avvike fra denne verdien: