FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2014.

Løsningsforslag til øving 8

Oppgave 1

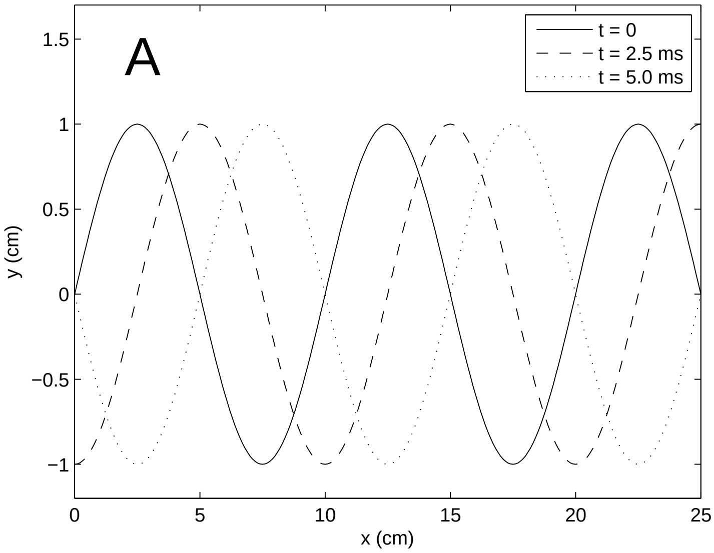
a)

$$y = A\sin(kx - \omega t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \tag{1}$$

med $A = 1.0$ cm, $T = 2\pi/\omega = 10$ ms og $\lambda = 2\pi/k = 10$ cm. Med følgende linjer i Matlab, der bølgetallet angis med enhet cm^{-1} og vinkelfrekvensen med enhet ms^{-1},

```
%Mekanisk Fysikk 2014.
%ving 8, oppgave 1a: Plotting av harmonisk blge
%y(x,t) = A sin(kx - wt)
%som funksjon av x mellom x=0 og x=25 cm, for de tre
%tidspunktene t=0, t=2.5 ms og t=5.0 ms.
%
clear all;
%A = amplituden (cm)
A = 1.0;
%k = blgetallet (1/cm)
k = 2*pi/10;
%w = vinkelfrekvensen (1/ms)
w = 200*pi/1000;
%x = posisjonstabell (cm)
x = 0:0.1:25;
%t = tidstabell (ms)
t = 0:2.5:5.0;
%y = tabell (matrise) med alle verdier for y(x,t)
for n = 1:3
    y(:,n) = A*sin(k*x-w*t(n));
end;
%Plotter y(x,t) for de tre tidspunktene
plot(x,y(:,1),'-k',x,y(:,2),'--k',x,y(:,3),':k');
handle=legend('t = 0','t = 2.5 ms','t = 5.0 ms');
label=('A');
text(2,1.4,label,'FontSize',28);
xlabel('x (cm)');
ylabel('y (cm)');
axis([0 25 -1.2 1.7]);
```

får vi denne figuren:



Riktig svar: A

b) Siden $y = y(x - vt)$ (med $v = \omega/k$), forplanter bølgen seg i positiv x-retning. Riktig svar: A

c) Utsvinget vil bli det samme som for $t = 0$ for hver hele periode, dvs for $t = nT = 10n$ ms, der $n = 1, 2, 3, \ldots$. Riktig svar: D

d) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt a slått fast at $T = 10$ ms. Riktig svar: D

e) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt a slått fast at $\lambda = 10$ cm. Riktig svar: C

f) En bølgetopp forplanter seg en bølgelengde $\lambda = 10$ cm på en periode $T = 10$ ms. Altså er fasehastigheten

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.10\,\mathrm{m}}{0.010\,\mathrm{s}} = 10\,\mathrm{m/s}$$

Riktig svar: D

g) Hastigheten til strengelementene (i y-retning) er gitt ved:

$$v_p = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(A\sin(kx - \omega t)\right) = -\omega A\cos(kx - \omega t). \tag{2}$$

Maksimalverdien av $\cos(kx - \omega t)$ er 1. Altså er maksimalhastighet for et strengelement:

$$v_p^{\max} = \omega A = 200\pi\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0.010\,\mathrm{m} = 2\pi\,\mathrm{m/s} \approx 6.3\,\mathrm{m/s}$$

Riktig svar: D

h)

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\sin(kx - \omega t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\omega A\cos(kx - \omega t)\right) = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t) \tag{3}$$

som har maksimalverdi

$$a^{\max} = \omega^2 A = \left(200\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 \cdot 0.010\,\mathrm{m} = 3.9 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}^2.$$

Riktig svar: A

i) Vi har

$$\sin u = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right).$$

Derfor, dersom vi velger $\phi = -\pi/2$, vil $y = A\cos(kx - \omega t + \phi)$ beskrive samme bølge som $y = A\sin(kx - \omega t)$. Riktig svar: D

<u>Merknad:</u> Fra (1), (2) og (3) har vi

$$\begin{aligned}
y &= A\sin(kx - \omega t) \\
v_p &= -\omega A\cos(kx - \omega t) = -\omega A \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \omega A \sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \omega A \sin\left[kx - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
a &= -\omega^2 A\sin(kx - \omega t) = \omega^2 A \sin(kx - \omega t - \pi) = \omega^2 A \sin[kx - (\omega t + \pi)].
\end{aligned}$$

Med andre ord kan vi si at a i tid er faseforskjøvet $\pi/2$ foran v_p som igjen er faseforskjøvet $\pi/2$ foran y.

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}
y_3 &= y_1 + y_2 \\
&= A\cos(kx - \omega t + \phi_1) + A\cos(kx - \omega t + \phi_2) \\
&= 2A\cos\frac{kx - \omega t + \phi_1 + kx - \omega t + \phi_2}{2} \cdot \cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\
&= 2A\cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\
&= A_3\cos(kx - \omega t + \phi_3) \qquad (4)
\end{aligned}$$

der vi har satt

$$\begin{aligned}
A_3 &\equiv 2A\cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \equiv 2A\cos\frac{\Delta\phi}{2} \qquad (5) \\
\phi_3 &= \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \qquad (6)
\end{aligned}$$

Riktig svar: B

b) $|A_3|$ har maksimalverdi når

$$\left|\cos\frac{\Delta\phi}{2}\right| = 1,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = n \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs når $\Delta\phi = n \cdot 2\pi, n = 0, 1, 2, \ldots$.
$|A_3|$ har minimalverdi nr

$$\cos\frac{\Delta\phi}{2} = 0,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = (2n+1) \cdot \pi/2, n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs når $\Delta\phi = (2n+1) \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Riktig svar: B

c) Med de beregnede faseforskjellene fra punkt *b*) finner vi at $|A_3|^{\max} = 2A$ (bølgene adderes i fase) og $|A_3|^{\min} = 0$ (bølgene adderes i motfase). Riktig svar: A

Oppgave 3

a) Bølgehastigheten for transversale bølger på en streng er utledet i forelesningene. Vi får

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{8.5}{0.028}} \simeq 17 \text{ m/s}$$

Riktig svar: A

b)

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

som gir bølgelengden

$$\lambda = \frac{v}{f} \simeq 17 \text{ m}$$

Riktig svar: A

c) Vi har ikke dispersjon i dette systemet, så v er den samme for alle bølger, uansett frekvens. Riktig svar: A

d) Ettersom λ er omvendt proporsjonal med f, vil en frekvens på 3.0 Hz resultere i en bølgelengde på ca 5.8 m. Riktig svar: D

e) og *f*) Vi har harmoniske bølger som kan beskrives ved

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

der $k = 2\pi/\lambda$ er bølgetallet og ϕ en fasekonstant. Vi velger $x = 0$ ved svingekilden og har

$$y(0,t) = A\cos(-\omega t + \phi) = A\cos\omega t$$

som gir $\phi = 0$ siden $\cos u = cos(-u)$. Dermed er bølgen beskrevet ved

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

For $x = 1.0$ og $x = 5.0$ m får vi

$$y(1.0,t) \simeq A\cos\left(2\pi\frac{1.0}{17} - 2\pi t\right)$$

$$y(5.0,t) \simeq A\cos\left(2\pi\frac{5.0}{17} - 2\pi t\right)$$

med t målt i sekunder. Riktig svar: B (på begge)

g) Faseforskjellen mellom utsvinget i disse to posisjonene er

$$\Delta\phi = \frac{8\pi}{17} \simeq 1.4 \simeq 83^\circ$$

Riktig svar: C

Oppgave 4

a) Små transversale utsving på en slik streng oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

og det eneste vi krever av funksjonen $\xi(x,t)$ er at den kan skrives på formen $f(x - vt)$ eller $g(x + vt)$, eller en kombinasjon av disse to, der f og g er vilkårlige to ganger deriverbare funksjoner. Den oppgitte gaussformede bølgepulsen er på en slik form ($\xi(x - vt)$) og representerer dermed en mulig bølgepuls langs strengen. Riktig svar: A

b) Bølgen propagerer i positiv x-retning. Riktig svar: A

c) Som utledet i forelesningene, og som vi ser av ligningen ovenfor, har vi

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

(Uttrykket på høyre side har dimensjon

$$\sqrt{\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2}{\mathrm{kg/m}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \mathrm{m/s}$$

som er det vi skal ha.) Riktig svar: B

d) Bølgepulsens energi endrer seg ikke med tiden. Vi kan derfor beregne E for et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel $t = 0$. Med energi $\varepsilon(x,0)\,dx$ på intervallet $(x, x + dx)$, må total energi være

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,0)\,dx.$$

Vi har, med $t = 0$,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_0(-2x/a^2)e^{-x^2/a^2},$$

som gir

$$\varepsilon(x,0) = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{a^2}\frac{2x^2}{a^2}e^{-2x^2/a^2}.$$

Vi substituerer $\beta = \sqrt{2}x/a$ som gir (med $dx = a\,d\beta/\sqrt{2}$)

$$E = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a}\int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a}$$

Så til tross for at det er fristende å insistere på alternativ D: Riktig svar er: C