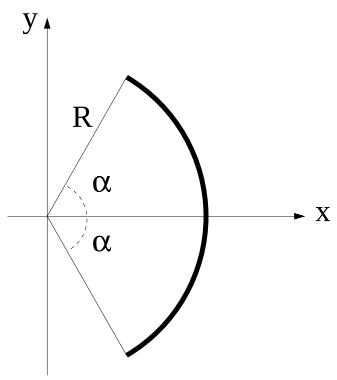
FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2014.
Veiledning: 23. - 26. september. Innleveringsfrist: Mandag 29. september kl 14.

Øving 4

Kanskje litt mye å gjøre på denne øvingen, men mange av spørsmålene tar kort tid å besvare.

Oppgave 1: Tyngdepunkt



a) En tynn, jevntykk bøyle er en del av en sirkel og har sektorvinkel 2α, som vist i figuren. Sirkelradien er R. Vis at tyngdepunktet er

$$X = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \to 0$? Er svarene rimelige?

b) Bøylen erstattes av en sirkelsektor (dvs ei tynn, jevntykk skive) med samme åpningsvinkel 2α og radius R. Vis at tyngdepunktet er

$$X = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

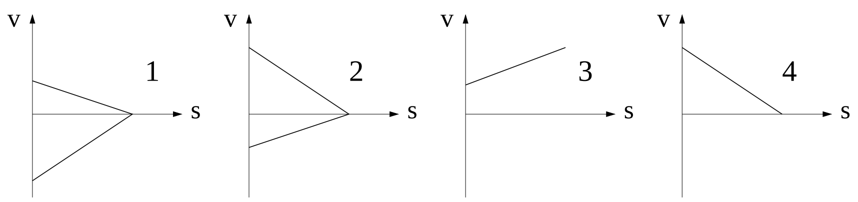
Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \to 0$? Er svarene rimelige?

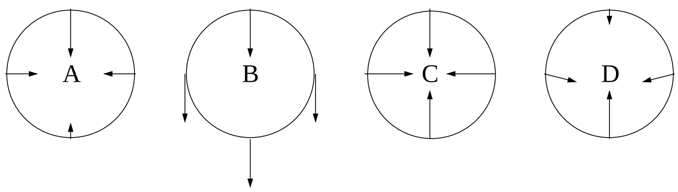
c) Vis at massesenteret til ei kompakt halvkule ligger i avstand $3R/8$ fra sentrum av den sirkulære bunnflaten.

Oppgave 2: Litt ymse

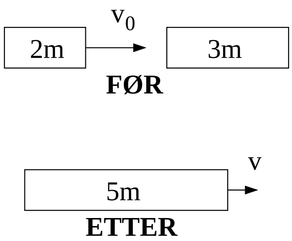
a) En kloss sendes oppover et skråplan. Det er friksjon mellom klossen og underlaget. Hvilken eller hvilke av figurene viser mulig graf for klossens hastighet v? (s angir klossens posisjon på skråplanet, og v og s er begge positive i retning oppover skråplanet.)

A) Kun graf 1.
B) Kun graf 2.
C) Graf 2 og 4.
D) Graf 1 og 3.





b) Ei vogn har stor nok hastighet til å fullføre en vertikaltstilt sirkelformet "loop". Hvilken figur viser riktige akselerasjonsvektorer på de fire stedene på loopen (nederst, øverst, venstre og høyre)? (Se bort fra friksjon.)



c) En kloss med masse $2m$ kolliderer fullstendig uelastisk med en kloss med masse $3m$. Før kollisjonen har klossen med masse $2m$ hastighet v_0 mens klossen med masse $3m$ ligger i ro. Etter kollisjonen har klossene felles hastighet v. Hvor mye mekanisk energi har gått tapt i kollisjonen?

A) $mv_0^2/3$ B) $2mv_0^2/5$
C) $3mv_0^2/5$ D) mv_0^2

Oppgave 3: Saturn V, trinn 1

Rakett-typen som blant annet sørget for å bringe Apollo 11 fra jorda til månen i juli 1969 kalles Saturn V. I det første av i alt tre rakett-trinn ble 13.2 tonn drivstoff forbrent pr sekund (dvs $dm/dt = -13.2 \cdot 10^3$ kg/s) og blåst ut bakover med en hastighet $|u| = 2.58$ km/s relativt raketten. Etter 2.5 minutter var alt drivstoff i trinn 1 brukt opp. Oppskytingen startet med raketten i ro på bakken, der tyngdens akselerasjon er $g = 9.81$ m/s^2. Total masse før avreise var $3.04 \cdot 10^6$ kg.

a) Bruk "rakettligningen" (som vi utledet i forelesningene)

$$ma = F_{\text{ytre}} + F_{\text{skyv}}$$

til å vise at rakettens hastighet etter en tid t blir

$$v(t) = -u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Her er m_0 startmassen, mens $m = m(t)$ er gjenværende masse ved tidspunktet t. Vi har valgt positiv retning oppover, slik at ytre kraft på raketten er $-mg$. Skyvkraften er $u \cdot \beta$, der u er eksosens hastighet relativt raketten og $\beta = dm/dt$ angir forbrent drivstoffmasse pr tidsenhet. Her er både u og β negative størrelser, og vi antar at de begge er konstante, som antydet innledningsvis. Vi antar også at tyngdens akselerasjon g kan regnes som konstant. (Denne antagelsen kan du se nærmere på i et frivillig ekstrapunkt *e*) nedenfor.)

b) Hvor stor må skyvkraften minst være for at raketten i det hele tatt skal ta av fra bakken? Sjekk at dette var tilfelle for Saturn V. Regn ut drivstoffmassen m_d ved avreise, $t = 0$, og rakettens sluttmasse m_f ved tidspunktet t_f, dvs idet alt drivstoff er brukt opp.

c) Vis at rakettens akselerasjon kan skrives som

$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0 + \beta t} - g.$$

Bestem akselerasjonen ved $t = 0$. Bestem også akselerasjon og hastighet ved slutten av trinn 1, dvs ved $t = t_f$.

d) Det oppgis at dersom $|x| \ll 1$, er det en god tilnærmelse å erstatte brøken $1/(1 + x)$ med polynomet $1 - x$. (Prøv for eksempel med $x = -0.01$.) Bruk Rottmann til å verifisere at $1/(1 + x) \simeq 1 - x$ når $|x| \ll 1$. Bruk deretter denne opplysningen til å vise at

$$a_{\text{lin}}(t) = a(0) - \frac{u\beta^2}{m_0^2}\, t$$

er en god tilnærmelse for $a(t)$ så lenge $t \ll m_0/(-\beta)$. Ta utgangspunkt i MATLAB-programmet rakett.m og modifiser linjene 25 og 48 slik at du får plottet $a(t)$ og $a_{\text{lin}}(t)$ i samme figur, for $0 < t < t_f$. Anslå på øyemål ved hvilket tidspunkt $a_{\mathrm{lin}}(t)$ begynner å bli en "mindre god" tilnærmelse for $a(t)$. Modifiser videre linje 27 slik at du får plottet $v(t)$ i en annen figur. (For innlevering, lagre figurene i pdf-format og send som vedlegg pr epost til din studass.)

e) (Frivillig ekstraoppgave) Hvor høyt, h_f, kommer raketten i løpet av dette første oppskytingstrinnet? Raketten trekkes mot jorda med gravitasjonskraften

$$F_G = \frac{GMm}{r^2},$$

der G er gravitasjonskonstanten, M er jordmassen, m er rakettmassen og r er avstanden mellom raketten og jordas sentrum. Anta at jorda er kuleformet med radius $R = 6.37 \cdot 10^3$ km. Hvis du har regnet riktig, har du kommet fram til at h_f er i underkant av 60 km. Bruk disse verdiene til å anslå hvor stor feil du har gjort underveis i dine regninger ved å bruke den konstante verdien 9.81 m/s^2 for tyngdens akselerasjon.

Oppgave 4: I_0 for kuleskall og kompakt kule

Vis at $I_0 = 2MR^2/3$ for et tynt kuleskall og at $I_0 = 2MR^2/5$ for ei kompakt kule.

Tips, kuleskall: Del opp kuleskallet i tynne ringer med omkrets $2\pi R \sin\theta$ og "bredde" $R\,d\theta$, dvs masse $dm = M dA/A = M \cdot 2\pi R \sin\theta \cdot R\,d\theta / 4\pi R^2$, og "legg sammen" (dvs integrer). Tegn figur! Du kan få bruk for $\sin^3 x = (3/4)\sin x - (1/4)\sin 3x$.

Tips, kompakt kule: Del opp kula i tynne kuleskall med radius r, tykkelse dr, og dermed masse $dm = M dV/V = M \cdot 4\pi r^2 dr/(4\pi R^3/3)$, og "legg sammen" (dvs integrer). Tegn figur!

Oppgave 5: Idrett og treghetsmoment

(Bruk resultatene i oppgave 4. Slå opp tallverdier eller gjør rimelige estimater.)

a) Hva er treghetsmomentet til en bordtennisball mhp en akse gjennom CM?

A) $7.2 \cdot 10^{-5}$ kg m^2 B) $7.2 \cdot 10^{-7}$ kg m^2 C) $7.2 \cdot 10^{-9}$ kg m^2 D) $7.2 \cdot 10^{-11}$ kg m^2

b) Hva er treghetsmomentet til ei friidrettskule (for menn) mhp en akse gjennom CM?

A) 10 kg m^2 B) 1.0 kg m^2 C) 0.10 kg m^2 D) 0.010 kg m^2

Oppgave 6: Parry People Movers

Energien i en tung roterende skive ("flywheel"; svinghjul) kan utnyttes til å drive en trikk eller buss framover og oppover, som et alternativ til eksterne strømførende ledninger, bensin eller gass. I en *Parry People Movers* trikk benyttes kompakte stålskiver på 500 kg, diameter 1 m, og rotasjonshastighet opp mot 2500 rpm ("revolutions per minute"). I spørsmålene nedenfor antar vi maksimal rotasjonshastighet, der det er relevant.

http://www.parrypeoplemovers.com/products.htm

a) Hva er svinghjulets treghetsmoment I_0 mhp hjulets sylinderakse (dvs en akse sammenfallende med akslingen)?

A) 62.5 kg m^2 B) $62.5 \cdot 10^3$ kg m^2 C) $62.5 \cdot 10^{-3}$ kg m^2 D) $62.5 \cdot 10^5$ kg m^2

b) Hva er svinghjulets omløpstid (periode) ?

A) 2.4 s B) 0.24 s C) 24 ms D) 24 μs

c) Hva er svinghjulets vinkelhastighet?

A) 0.417 s^{-1} B) 2.62 s^{-1} C) 41.7 s^{-1} D) 262 s^{-1}

d) Hva er svinghjulets kinetiske energi?

A) 0.59 Wh B) 0.59 kWh C) 59 Wh D) 59 kWh