

Øving 8

Denne øvingen leveres på tradisjonelt vis; dvs det holder ikke bare å levere inn en rekke med bokstavsvar.

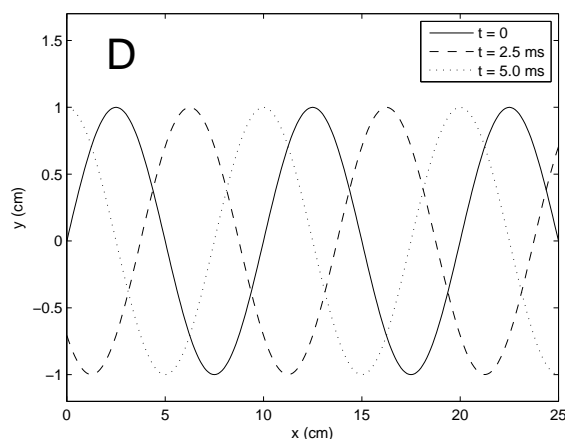
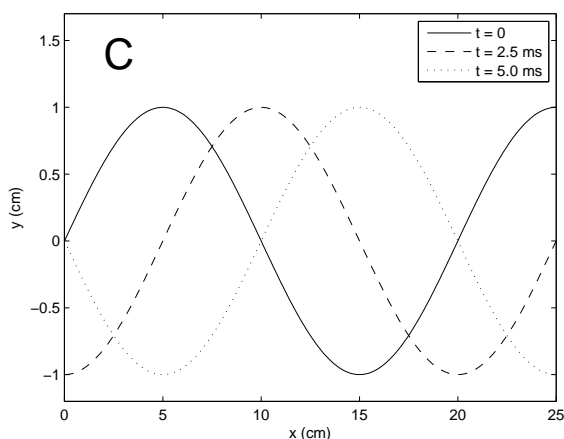
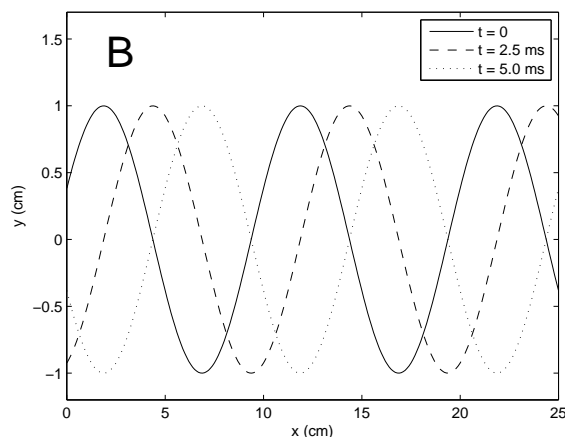
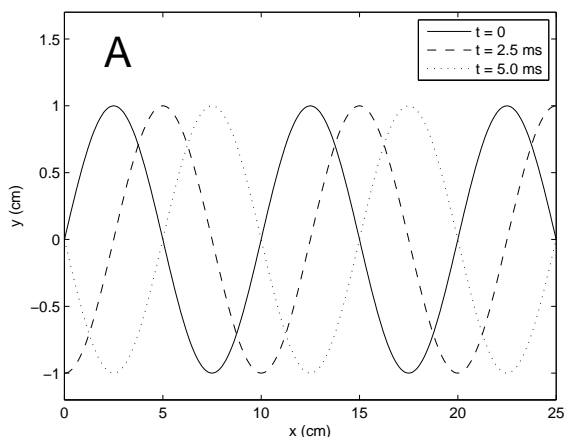
**Oppgave 1**

En bølge forplanter seg på en streng utstrakt horisontalt (i  $x$ -retning). Strengen har kun vertikale utsving (i  $y$ -retning). Vi antar at strengen er uendelig lang og at utsvinget til strengen (overalt og til alle tider) er beskrevet ved:

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

der  $A = 1.0 \text{ cm}$ ,  $k = 2\pi/10 \text{ cm}^{-1}$  og  $\omega = 200\pi \text{ s}^{-1}$ .

a) Hvilken figur viser utsvinget  $y$  som funksjon av  $x$  for  $0 \leq x \leq 25 \text{ cm}$ , for  $t = 0$ ,  $t = 2.5$  og  $t = 5.0 \text{ ms}$ ?



b) I hvilken retning forplanter bølgen seg?

- A) I positiv  $x$ -retning.    B) I negativ  $x$ -retning.    C) I positiv  $y$ -retning.    D) I negativ  $y$ -retning.

c) For hvilke tider  $t$  vil utslaget  $y$  (for alle verdier av  $x$ ) være det samme som for  $t = 0$ ?

- A)  $t = 2.5n \text{ ms}$     B)  $t = 5.0n \text{ ms}$     C)  $t = 7.5n \text{ ms}$     D)  $t = 10n \text{ ms}$     ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

d) Hva er perioden  $T$  for denne bølgen?

- A)  $T = 2.5$  ms    B)  $T = 5.0$  ms    C)  $T = 7.5$  ms    D)  $T = 10$  ms

e) Hva er bølgelengden  $\lambda$  for denne bølgen?

- A)  $\lambda = 1$  cm    B)  $\lambda = 2$  cm    C)  $\lambda = 10$  cm    D)  $\lambda = 25$  cm

f) Hva er bølgehastigheten  $v$ ? (Kalles også fasehastigheten.)

- A)  $v = 5$  cm/s    B)  $v = 10$  cm/s    C)  $v = 5$  m/s    D)  $v = 10$  m/s

g) Hva er maksimal hastighet  $v_p^{\max}$  til et strenglement? (Hastigheten  $v_p$  kalles ofte partikkelhastighet.)

- A) 2.2 cm/s    B) 6.3 cm/s    C) 2.2 m/s    D) 6.3 m/s

h) Hva er maksimal akselerasjon  $a^{\max}$  til et strenglement?

- A) 3.9 km/s<sup>2</sup>    B) 3.9 m/s<sup>2</sup>    C) 3.9 cm/s<sup>2</sup>    D) 3.9 mm/s<sup>2</sup>

i) Dersom  $y = A \cos(kx - \omega t + \phi)$  skal beskrive *eksakt* den samme bølgen som  $y = A \sin(kx - \omega t)$ , hvilken verdi må  $\phi$  ha?

- A)  $\phi = \pi$     B)  $\phi = -\pi$     C)  $\phi = \pi/2$     D)  $\phi = -\pi/2$

## Oppgave 2

a) Summen  $y_3 = y_1 + y_2$  av to harmoniske bølger med samme amplitude, frekvens og bølgelengde beskrevet ved  $y_1 = A \cos(kx - \omega t + \phi_1)$  og  $y_2 = A \cos(kx - \omega t + \phi_2)$  er også en harmonisk bølge beskrevet ved  $y_3 = A_3 \cos(kx - \omega t + \phi_3)$ . Hva er  $A_3$  og  $\phi_3$  uttrykt ved  $A$ ,  $\phi_1$  og  $\phi_2$ ? (Hint:  $\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$ )

- A)  $A_3 = 2A \cos \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$ ,  $\phi_3 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$     B)  $A_3 = 2A \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$ ,  $\phi_3 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$   
C)  $A_3 = A \cos \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$ ,  $\phi_3 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$     D)  $A_3 = A \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$ ,  $\phi_3 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$

b) Vi lar nå faseforskjellen mellom de to bølgene  $y_1$  og  $y_2$ , dvs  $\Delta\phi \equiv \phi_1 - \phi_2$ , variere. Hvilke verdier av  $\Delta\phi$  gir henholdsvis maksimalverdi og minimalverdi for  $|A_3|$ ?

- A)  $|A_3|^{\max}$  for  $\Delta\phi = n\pi/2$ ,  $|A_3|^{\min}$  for  $\Delta\phi = (2n + 1)\pi$   
B)  $|A_3|^{\max}$  for  $\Delta\phi = 2\pi n$ ,  $|A_3|^{\min}$  for  $\Delta\phi = (2n + 1)\pi$   
C)  $|A_3|^{\max}$  for  $\Delta\phi = n\pi/2$ ,  $|A_3|^{\min}$  for  $\Delta\phi = (n/3 + 1)\pi$   
D)  $|A_3|^{\max}$  for  $\Delta\phi = 2\pi n$ ,  $|A_3|^{\min}$  for  $\Delta\phi = (n/3 + 1)\pi$   
( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

c) Hva blir  $|A_3|^{\max}$  og  $|A_3|^{\min}$ ?

- A)  $|A_3|^{\max} = 2A$ ,  $|A_3|^{\min} = 0$     B)  $|A_3|^{\max} = 2A$ ,  $|A_3|^{\min} = A/2$   
C)  $|A_3|^{\max} = A$ ,  $|A_3|^{\min} = 0$     D)  $|A_3|^{\max} = A$ ,  $|A_3|^{\min} = A/4$

### Oppgave 3

Den venstre enden av en (lang) streng strukket i  $x$ -retning tvinges til å vibrere normalt på strengens utstrekning (dvs såkalt transversalt) med et utsving gitt ved

$$y = A \cos \omega t$$

der  $A = 0.10$  m og  $\omega = 2\pi f$  med  $f = 1.0$  Hz. Strekket i strengen er  $S = 8.5$  N, og masse pr lengdeenhet er  $\mu = 28$  g/m. Anta at svingningen gitt ovenfor resulterer i at en rent harmonisk transversal bølge forplanter seg i positiv  $x$ -retning på strengen. Velg  $x = 0$  ved strengens venstre ende, og anta at strengen er så lang at du ikke får noen reflektert bølge mens du gjør eksperimentet.)

a) Hva er bølgehastigheten  $v$  på strengen?

- A) 17 m/s    B) 49 cm/s    C) 6 cm/s    D) 5.8 m/s

b) Hva er bølgelengden til bølgen som forplanter seg langs strengen?

- A) 17 m    B) 49 cm    C) 6 cm    D) 5.8 m

c) Hva blir bølgehastigheten dersom strengens venstre ende svinger tre ganger så fort (dvs med  $f = 3.0$  Hz)?

- A) 17 m/s    B) 49 cm/s    C) 6 cm/s    D) 5.8 m/s

d) Hva blir bølgelengden dersom strengens venstre ende svinger tre ganger så fort?

- A) 17 m    B) 49 cm    C) 6 cm    D) 5.8 m

e) Med frekvensen 1.0 Hz, hva blir utsvinget  $y$  til et punkt på strengen som ligger i posisjonen  $x = 1.0$  m? (Målt i meter, som funksjon av tiden  $t$ , målt i sekunder.)

- A)  $y(1.0, t) = 0.10 \cos(0.37 + 6.28t)$     B)  $y(1.0, t) = 0.10 \cos(0.37 - 6.28t)$   
C)  $y(1.0, t) = 0.10 \cos(0.37 + 1.57t)$     D)  $y(1.0, t) = 0.10 \cos(0.37 - 1.57t)$

f) Med frekvensen 1.0 Hz, hva blir utsvinget  $y$  til et punkt på strengen som ligger i posisjonen  $x = 5.0$  m? (Målt i meter, som funksjon av tiden  $t$ , målt i sekunder.)

- A)  $y(5.0, t) = 0.10 \cos(1.85 + 6.28t)$     B)  $y(5.0, t) = 0.10 \cos(1.85 - 6.28t)$   
C)  $y(5.0, t) = 0.10 \cos(1.85 + 1.57t)$     D)  $y(5.0, t) = 0.10 \cos(1.85 - 1.57t)$

g) Hvor stor er faseforskjellen mellom utsvinget i disse to posisjonene (dvs 1.0 og 5.0 m fra svingekilden)?

- A)  $12^\circ$     B)  $49^\circ$     C)  $83^\circ$     D)  $117^\circ$

## Oppgave 4

En gaussformet bølgepuls

$$\xi(x, t) = \xi_0 \exp \left[ -\frac{(x - vt)^2}{a^2} \right]$$

vandrer med hastighet  $v$  langs en (uendelig lang) streng med massetetthet  $\mu$  [kg/m] og strekk-kraft  $S$  [N]. Størrelsen  $\xi(x, t)$  representerer det transversale utsvinget (i forhold til likevekt) ved tidspunkt  $t$  for den biten av strengen som befinner seg i posisjon  $x$ . Bølgens maksimale utsving  $\xi_0$  er lite (dvs: i forhold til bølgens utstrekning, som er av størrelsesorden  $a$ ).

a) Hvorfor kan vi være sikre på at  $\xi(x, t)$  virkelig *er* en mulig bølgepuls langs en slik streng?

- A)  $\xi(x, t)$  er to ganger deriverbar og har riktig avhengighet av  $x$  og  $t$ .
- B)  $\xi(x, t)$  har endelig utstrekning i rommet.
- C)  $\xi(x, t)$  er symmetrisk.
- D)  $\xi(x, t)$  avtar tilstrekkelig raskt mot null for store verdier av  $x$  og  $t$ .

b) I hvilken retning propagerer bølgen?

- A) I positiv  $x$ -retning.
- B) I negativ  $x$ -retning.
- C) I positiv  $y$ -retning.
- D) I negativ  $y$ -retning.

c) Hva er bølgepulsens hastighet  $v$ ?

- A)  $v = a \cdot t$
- B)  $v = \sqrt{S/\mu}$
- C)  $v = \xi_0/t$
- D)  $v = a/t$

d) Hva blir (den totale) energien  $E$  assosiert med bølgepulsens?

- A)  $E = \pi\mu v^2 \xi_0^2 / \sqrt{2a}$
- B)  $E = \mu v^2 a / 2$
- C)  $E = \sqrt{\pi} \mu v^2 \xi_0^2 / \sqrt{2a}$
- D)  $E = 42$

Tips til d): Ta utgangspunkt i at bølgens energi pr lengdeenhet er

$$\varepsilon(x, t) = \mu v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

som utledet i forelesningene. Dermed er  $\varepsilon(x, t) dx$  bølgens energiinnhold mellom  $x$  og  $x + dx$ . Det oppgis her følgende integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$