Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2005

Løsningsforslag til øving 1

Veiledning 13. og 14. januar

Aller først et par kommentarer angående notasjon: Mens vektorer på tavla blir angitt med en pil over symbolet, brukes typisk **fete** symboler i trykte notater, som her. Det betyr at $\boldsymbol{F}$ angir vektoren (f.eks. en kraft), og da både dens størrelse F og retning. Enhetsvektorer, dvs (dimensjonsløse) vektorer med lengde 1, angis med en $\hat{}$ over symbolet. Da har vi f.eks. sammenhengene $\boldsymbol{F} = |\boldsymbol{F}|\hat{F} = F\hat{F}$. Videre vil vi skrive de ulike *komponentene* av en vektor med en senket indeks, f.eks. F_x for x-komponenten av $\boldsymbol{F}$. Vi skal altså ikke bruke notasjonen $F_x = dF/dx$, slik dere muligens kommer til å gjøre i noen av matematikkfagene.

Oppgave 1

a) Riktig svar er C:

$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{8.5^2 + 1.3^2} = 8.6$$

b) Riktig svar er B:
Vektoren $\boldsymbol{A}$ har negativ x-komponent og positiv y-komponent, hvilket betyr at den ligger i 2. kvadrant. La oss først bestemme vinkelen θ mellom negativ x-akse og $\boldsymbol{A}$. Vi har da

$$\tan\theta = \frac{|A_y|}{|A_x|} = \frac{2.3}{3.7}$$

som gir $\theta = 32$ grader. Den søkte vinkelen, når vi går mot urviseren fra positiv x-akse til $\boldsymbol{A}$, må bli lik 180 - $\theta = 148$ grader.

c) Riktig svar er A:
La oss sette $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$. Da er

$$C_x = B_x - A_x = -10.7$$

$$C_y = B_y - A_y = 3.9$$

slik at absoluttverdien til $\boldsymbol{C}$ blir

$$C = |\boldsymbol{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{10.7^2 + 3.9^2} = 11.4$$

d) Riktig svar er C:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y = (-6.1) \cdot (-9.8) + (-5.8) \cdot 4.6 = 33.1$$

Oppgave 2

Vi kan med god tilnærmelse regne oksygenmolekylene som punktformede legemer ettersom avstanden mellom dem (300 Å) er mye større enn hvert enkelt molekyls utstrekning (av størrelsesorden 1 - 2 Å). Massen til et oksygenmolekyl er $m(O_2) = (32 \text{ g/mol}) \ / \ (6.02 \cdot 10^{23} \text{ molekyler/mol}) = 5.32 \cdot 10^{-23}$ g/molekyl $= 5.32 \cdot 10^{-26}$ kg. Gravitasjonskraften mellom de to oksygenmolekylene blir da

$$F_g = G\frac{m(O_2)^2}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{(5.32 \cdot 10^{-26})^2 \text{ kg}^2}{(300 \cdot 10^{-10})^2 \text{ m}^2} = 2.09 \cdot 10^{-46} \text{ N}$$

Gravitasjonskrefter er alltid *tiltrekkende*.
Med ett ekstra elektron har hvert ion O_2^- en ladning $q = -e$. Den elektriske kraften F_e mellom de to ionene blir dermed

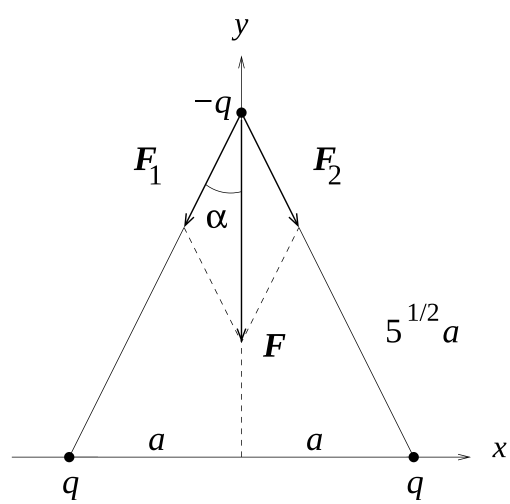
$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(300 \cdot 10^{-10})^2} = 2.56 \cdot 10^{-13} \text{ N}$$

Med ladningene i enheten C og avstanden i enheten m, samt SI-verdien $9 \cdot 10^9$ for faktoren $1/4\pi\varepsilon_0$ er vi sikret at kraften kommer ut i enheten N.
Den elektriske kraften mellom to ladninger med *samme fortegn* er *frastøtende*.
Forholdet mellom de to kreftene er

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{2.56 \cdot 10^{-13}}{2.09 \cdot 10^{-46}} \sim 10^{33}$$

Dette betyr at gravitasjonskreftene mellom ("ikke altfor store") ladete legemer som regel kan neglisjeres i forhold til den elektriske kraften.

Oppgave 3



Den tredje ladningen skal ligge like langt fra de to andre, på positiv y-akse. Pytagoras gir da en posisjon $y = \sqrt{(\sqrt{5}a)^2 - a^2} = 2a$ for den tredje ladningen.

Kraften mellom $-q$ og q er tiltrekkende, ettersom de har motsatt fortegn. I absoluttverdi må de to kreftene F_1 og F_2 være like store:

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(\sqrt{5}a)^2} = \frac{q^2}{20\pi\varepsilon_0 a^2}$$

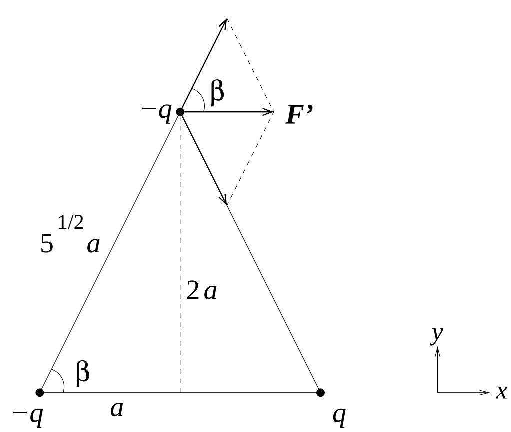
Av figuren ser vi at $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$ har like store y-komponenter men motsatt rettede x-komponenter. Dermed blir den resulterende kraften

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= (F_{1y} + F_{2y})\,\hat{y} \\ &= 2F_{1y}\,\hat{y} \\ &= -2F_1\frac{2}{\sqrt{5}}\,\hat{y} \\ &= -\frac{q^2}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 a^2}\,\hat{y}\end{aligned}$$

Her angir $\hat{y}$ enhetsvektor i y-retning. Vi har her brukt at F_{1y} forholder seg til F_1 som vertikalavstanden $2a$ forholder seg til avstanden mellom q og $-q$, dvs $\sqrt{5}\,a$. Eventuelt: For å få y-komponenten av F_1, må vi multiplisere med cosinus til vinkelen α (se figuren), som er $2/\sqrt{5}$. Med $q = 2\cdot 10^{-6}$ C og $a = 4\cdot 10^{-2}$ m får vi

$$F = \frac{(2\cdot 10^{-6})^2\mathrm{C}^2}{5\sqrt{5}\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\mathrm{C}^2/\mathrm{Nm}^2\cdot(4\cdot 10^{-2})^2\mathrm{m}^2} \simeq 8.0\ \mathrm{N}$$

Dersom q i $x = -a$ erstattes av $-q$, virker det en tiltrekkende og en frastøtende kraft på den tredje ladningen:



Vi ser av figuren at totalkraften $\boldsymbol{F'}$ peker i positiv x-retning. x-komponenten av hver av delkreftene finner vi ved å multiplisere med $\cos\beta = 1/\sqrt{5}$. Dermed ser vi at F' må bli halvparten så stor som F, dvs

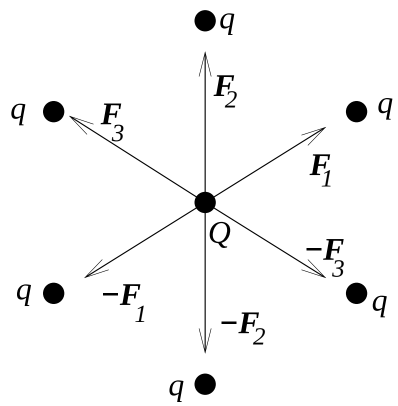
$$\boldsymbol{F'} = \frac{q^2}{10\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{x} = (4.0\ \mathrm{N})\hat{x}$$

Kommentar: Denne oppgaven var vel ikke altfor vanskelig? Ikke desto mindre illustrerer den flere grunnleggende elementer:

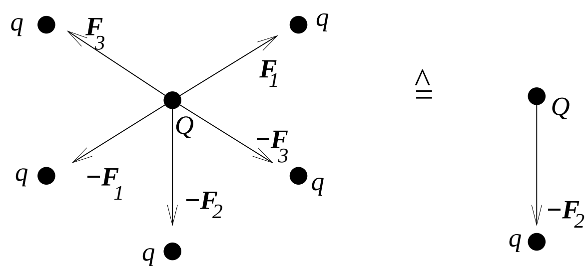
- Elektriske ladninger påvirker hverandre ("vekselvirker") med krefter ifølge Coulombs lov.
- Krefter, enten de er elektriske eller av andre slag, er *vektorer*.
- For elektriske krefter (og andre krefter, for den saks skyld) gjelder *superposisjonsprinsippet*: Totalkraften på en ladning finner vi ved å summere opp enkeltkreftene som virker på den. For all del, ikke glem at det da er snakk om en sum av vektorer!

Oppgave 4

a) På grunn av symmetrien i problemet er det vel innlysende at testladningen Q blir utsatt for null nettokraft, idet kreftene fra to og to ladninger kansellerer hverandre:



b) Vi fjerner en av ladningene, f.eks. den "øverste":

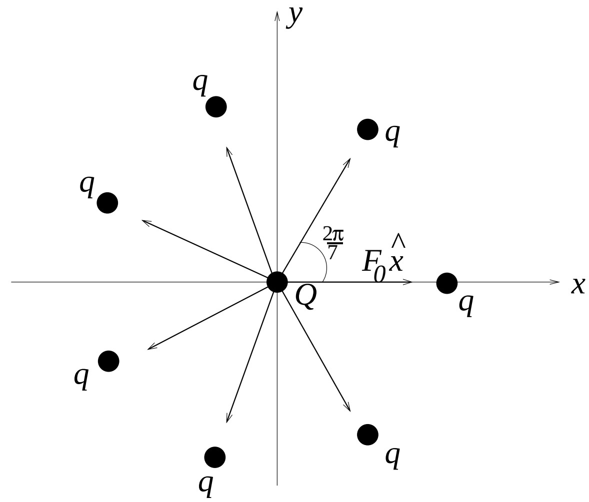


Det er da umiddelbart klart at nettokraften på Q blir lik kraften fra den ladningen vi fjernet, med motsatt fortegn, altså -$\boldsymbol{F}_2$.
Vi har her brukt *superposisjonsprinsippet*. Matematisk kunne vi f.eks. formulere løsningen slik: La $\sum_{(6)} \boldsymbol{F}_i$ angi nettokraften med alle 6 ladningene til stede og $\sum_{(5)} \boldsymbol{F}_i$ nettokraften etter vi har fjernet ladningen som påvirket Q med kraften $\boldsymbol{F}_2$. Da er

$$\sum_{(5)} \boldsymbol{F}_i = \sum_{(6)} \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{F}_2 = 0 - \boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_2$$

c) Også med et odde antall q-ladninger, f.eks. 7, må nettokraften på testladningen Q i sentrum bli lik null. Anta at nettokraften *ikke* var null. En dreining av systemet på $360/7\,^\circ$ i papirplanet

ville da medføre at nettokraften endret retning. Men systemet er uendret som følge av en slik dreining, så kraften på Q kan heller ikke ha endret seg og må følgelig være null.
Hvis noen mot formodning ikke er overbevist, er det jo bare å regne ut nettokraften. Legg Q i origo og (f.eks.) den ene q på x-aksen:

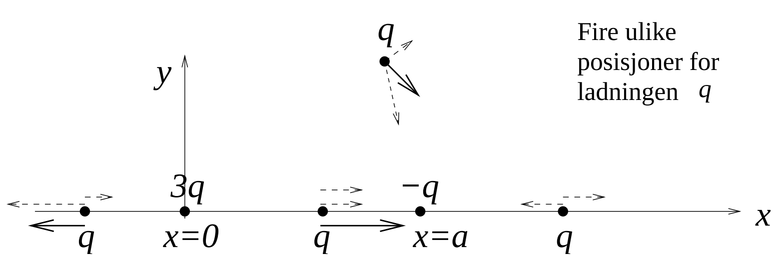


Nettokraften på Q blir da:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= F_x\hat{x} + F_y\hat{y} \\
&= F_0\,(1 + 2\cos 2\pi/7 + 2\cos 4\pi/7 + 2\cos 6\pi/7)\,\hat{x} + \\
&\quad F_0\,(0 + \sin 2\pi/7 + \sin(-2\pi/7) + \sin 4\pi/7 + \sin(-4\pi/7) + \sin 6\pi/7 + \sin(-6\pi/7))\,\hat{y} \\
&= F_0\,(1 + 1.247 - 0.445 - 1.802)\,\hat{x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Her har vi satt absoluttverdien av kraften mellom q og Q lik F_0 og benyttet at $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$.

Oppgave 5



a) Punktladningen q er i likevekt dersom kraften på den er lik null. Her virker det to krefter, en frastøtende fra $3q$ og en tiltrekkende fra $-q$, og disse to kan bare kansellere hverandre dersom de har eksakt motsatt retning. Det er ikke mulig dersom q er plassert utenfor x-aksen, f.eks. som i figuren over. (Her er de to enkeltkomponentene av kraften angitt med stiplede piler og totalkraften med heltrukken pil.) Derfor må eventuelle likevektsposisjoner være på x-aksen.

b) Vi har fått oppgitt at det er *en* likevektsposisjon x_0 for q på x-aksen. Vi kan ikke ha x_0 mellom 0 og a, for på dette intervallet peker de to kraftkomponentene i samme retning. Vi kan heller ikke ha x_0 til venstre for $x = 0$, for da er avstanden mellom q og $3q$ alltid mindre enn avstanden mellom q og $-q$, og følgelig den frastøtende kraften $3q^2/4\pi\varepsilon_0 x_0^2$ alltid større enn den tiltrekkende kraften $q^2/4\pi\varepsilon_0(a - x_0)^2$. Altså må $x_0 > a$. Vi bestemmer x_0 ved å sette total kraft lik null:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_0^2}\hat{x} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(x_0 - a)^2}\hat{x} \\
\Rightarrow &\quad \frac{3}{x_0^2} = \frac{1}{(x_0 - a)^2} \\
\Rightarrow &\quad 3x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 = x_0^2 \\
\Rightarrow &\quad 2x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 = 0 \\
\Rightarrow &\quad x_0 = \frac{6a}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{36a^2 - 24a^2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}a \simeq 2.37a
\end{aligned}
$$

Da forutsetningen var $x_0 > a$, er løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten ikke en aktuell løsning. (Den tilsvarer $x \simeq 0.63a$, hvor begge kraftkomponenter er like store og har *samme* retning.)
Stabiliteten av likevektsposisjonen x_0 bestemmes kanskje enklest ved å se på nettokraften når $x \gg x_0$. Da "ser" punktladningen q tilnærmet en punktladning $3q - q = 2q$ og må følgelig erfare en netto frastøtende kraft. Vi vet at kraften er null bare i $x = x_0$. Da må kraften peke mot høyre for alle $x > x_0$, også for en liten forflytning til høyre for x_0, mens den må peke mot venstre for en liten forflytning til venstre for x_0. Dermed er likevekten ustabil mhp en forflytning langs x-aksen.
Alternativt, med litt regning: La oss først forenkle notasjonen ved å innføre funksjonen $f(x)$:

$$
\boldsymbol{F}(x) = F(x)\hat{x} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x - a)^2}\right)\hat{x} \equiv \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}f(x)\hat{x}
$$

Deretter bestemmer vi df/dx i $x = x_0$:

$$
\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = -\frac{6}{x_0^3} + \frac{2}{(x_0 - a)^3} \simeq -\frac{6}{(2.37a)^3} + \frac{2}{(1.37a)^3} \simeq \frac{0.33}{a^3} > 0
$$

Da $f(x_0) = 0$ og $f'(x_0) > 0$, er likevekten ustabil.