Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2005

Løsningsforslag til øving 15

Veiledning torsdag 28. og fredag 29. april

Oppgave 1

a) Eksempler:
For et uendelig stort ladet plan med ladning σ pr flateenhet er det elektriske feltet motsatt rettet på den ene og den andre siden av planet, og feltstyrken er $\sigma/2\varepsilon_0$. Altså en *diskontinuitet* på i alt σ/ε_0 i feltets normalkomponent, og ingen diskontinuitet i feltets tangentialkomponent.
Inne i ei metallkule med ladning Q er det elektriske feltet null. På overflaten, ved $r = R$, er feltstyrken $Q/4\pi\varepsilon_0 R^2$, rettet radielt utover (med $Q > 0$), dvs normalt til overflaten. Igjen, en diskontinuitet på σ/ε_0 i feltets normalkomponent, ettersom $\sigma = Q/4\pi R^2$ er ladning pr flateenhet på metallkulas overflate.
Et uendelig stort strømførende plan med uniform strøm i pr lengdeenhet resulterer i et uniformt magnetfelt $\mu_0 i/2$, med motsatt retning på hver sin side av planet, se øving 13, oppgave 2. Dvs en diskontinuitet på $\mu_0 i$, og hvis du ser på øving 13, ser du at det er snakk om komponenten av $\boldsymbol{B}$ som ligger *i* planet til strømmen og som står *normalt på* strømretningen.
Inni en uendelig lang spole er magnetfeltet $\mu_0 nI$, utenfor er det null. Altså en diskontinuitet på $\mu_0 nI$. Strømmen er I pr vikling, mens antall viklinger pr lengdeenhet er n, så $i = nI$ blir her strømmen pr lengdeenhet. Igjen en diskontinuitet på $\mu_0 i$.
Kommentar: Ingen grenseflater er uendelig store, men dersom vi går tilstrekkelig nær grenseflaten, vil det *se ut som den er* uendelig stor og flat. Det *totale* elektriske feltet på grenseflaten må være lik summen av bidragene fra området i nærheten, dvs det som ser stort og flatt ut, og alle ladninger i "resten av verden". Ladningene i resten av verden er alle langt unna "krysningspunktet", dvs langt unna i forhold til ladningene som er *i* planet der vi krysser. "Resten av verden" må derfor bidra med samme felt like over og like under grenseflaten, dvs et bidrag som er *kontinuerlig*. Med andre ord, hele diskontinuiteten i det elektriske feltet skyldes ladningene i planet som vi krysser. Tilsvarende gjelder for diskontinuiteten i magnetfeltet: Totalt magnetfelt er summen av bidragene fra strømmen *i* planet der vi krysser, og alle andre strømmer i verden. Bare strømmen i planet der vi krysser bidrar til diskontinuiteten.

b) Dielektrisk skive på tvers i konstant ytre elektrisk felt $\boldsymbol{E}_0$:
Her har vi grenseflater som står normalt på feltene. Vi kan ikke uten videre bruke grenseflatebetingelsen for $\boldsymbol{E}$ for vi vet ikke hvor mye ladning vi har i grenseflatene mellom vakuum og dielektrikum. Vi vet at det induseres bundet ladning, positiv i øvre flate og negativ i nedre flate, men ikke *hvor mye*. Men vi kan bruke grenseflatebetingelsen for $\boldsymbol{D}$, for vi vet at det er null *fri* ladning i skiva. Dermed har vi $D_1 = D_0$, der $D_0 = \varepsilon_0 E_0$ er elektrisk forskyvning utenfor skiva. Dessuten har vi at $D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_1$. Dermed:

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_0 E_0 \\ E_1 &= \frac{1}{\varepsilon_r} E_0 \end{aligned}$$

Dielektrisk skive på langs i konstant ytre elektrisk felt $\boldsymbol{E}_0$:
Nå har vi grenseflater parallelt med feltretningen. Da kan vi bruke at parallellkomponenten til $\boldsymbol{E}$ er kontinuerlig, dvs $E_1 = E_0$. Sammenhengen $D_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_1$ gjelder selvsagt fortsatt, så

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_r \varepsilon_0 E_0 \\ E_1 &= E_0 \end{aligned}$$

Magnetiserbar skive på tvers i konstant ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}_0$:
Her har vi igjen grenseflater som står normalt på feltene. Vi kan da benytte oss av at B_n er kontinuerlig, dvs $B_1 = B_0$. Dessuten har vi at $B_1 = \mu_1 H_1 = \mu_r \mu_0 H_1$. Dermed:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_0 \\ B_1 &= B_0 \end{aligned}$$

Magnetiserbar skive på langs i konstant ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}_0$:
Grenseflatene er parallelt med feltene. Vi vet at det induseres magnetiseringsstrøm i skivas overflate men ikke hvor mye. Men vi kan bruke grenseflatebetingelsen for $\boldsymbol{H}$, for vi vet at det er null fri strøm i skiva. Dermed har vi $H_1 = H_0$, der $H_0 = B_0/\mu_0$ er H-feltet utenfor skiva (vakuum). Dessuten har vi $B_1 = \mu_r \mu_0 H_1$. Dermed:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\mu_0} B_0 \\ B_1 &= \mu_r B_0 \end{aligned}$$

Forklaring på ulik E_1 og B_1 i de to tilfellene:
Dielektrisk skive på tvers gir polarisering, og tilhørende indusert ladning i overflaten. Den induserte ladningen gir bidrag til feltet motsatt rettet det ytre feltet, slik at E_1 blir mindre enn E_0. Med skiva på langs blir den induserte overflateladningen lokalisert uendelig langt unna "der vi er". Dermed bidrar den ikke til feltet der vi er, og $E_1 = E_0$.
Magnetiserbar skive på langs gir magnetisering, og tilhørende indusert strøm i overflaten. Den induserte strømmen gir bidrag til feltet i samme retning som det ytre feltet, slik at B_1 blir større enn B_0. Med skiva på tvers blir den induserte overflatestrømmen lokalisert uendelig langt unna "der vi er". Dermed bidrar den ikke til feltet der vi er, og $B_1 = B_0$.

Oppgave 2

Den *påtrykte* strømmen I genererer et H-felt $H = nI$ på langs overalt inne i spolen (pga Amperes lov for H). Dermed er det bare å benytte at

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H}$$

for å bestemme de ulike størrelsene:

Inne i jernstaven:

$$H_j = nI = 2000 \text{ m}^{-1} \cdot 3 \text{ A} = 6000 \text{ A/m}$$

$$B_j = \mu_r \mu_0 H_j = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (Vs/Am)} \cdot 6000 \text{ A/m } = 15 \text{ T}$$

$$M_j = (\mu_r - 1) H_j = 1.2 \cdot 10^7 \text{ A/m}$$

I den luftfylte delen inne i spolen:

$$H_0 = H_j = 6000 \text{ A/m}$$

$$B_0 = \mu_0 H_0 = 7.5 \text{ mT}$$

$$M_0 = 0$$

Den beregnede magnetiseringen inne i jernstaven, $M_j = 1.2 \cdot 10^7$ A/m, er større enn metningsmagnetiseringen $M_s = 1.6 \cdot 10^6$ A/m, og derfor ikke fysisk mulig. Årsaken er at vi har brukt den lineære sammenhengen $B = \mu_r \mu_0 H$ mellom magnetfeltet B og feltet H fra den påtrykte strømmen. Her har vi imidlertid et så sterkt "ytre" felt H at en slik lineær sammenheng ikke lenger er gyldig. Samtlige magnetiske dipolmoment er rettet inn langs det påtrykte feltet allerede ved $H \simeq M_s/\mu_r = 800$ A/m. Ytterligere økning i H gir ingen økning i M.
Korrigert, maksimal verdi for B_j blir

$$B_j^{\text{korr}} = \mu_0 (H_j + M_s) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \left(6000 + 1.6 \cdot 10^6\right) = 2 \text{ T}$$

Oppgave 3

a) Arealet som strømsløyfa omslutter er $L \cdot x$, og dette øker lineært med tiden, $dA/dt = Ldx/dt = Lv$. Omsluttet magnetisk fluks er $\phi = B \cdot A = BLx$, slik at indusert ems i strømsløyfa blir $\mathcal{E} = d\phi/dt = BLdx/dt = BLv$. Sløyfa har resistans R, så ifølge Ohms lov blir strømmen i kretsen

$$I = \mathcal{E}/R = BLv/R$$

Strømmen går mot klokka. Det innser vi fordi kraften på en positiv ladning q i metallstanga, $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, er rettet oppover. Alternativt, med Lenz' lov: Økende areal gir økende omsluttet magnetisk fluks inn i planet. Strømmen må da gå i en slik retning av fluksen på grunn av I peker ut av planet når vi er på innsiden av sløyfa.

b) Strømmen I går oppover i metallstanga, magnetfeltet peker inn i planet, så magnetsk kraft på strømmen I blir rettet mot venstre og er

$$F = ILB = B^2 L^2 v/R$$

c) Fra forrige punkt har vi altså at vi må trekke metallstanga bortover mot høyre med en kraft F for å opprettholde konstant hastighet. Slipper vi stanga, blir den eneste krafta som virker den (bremsende) magnetiske krafta mot venstre. Newtons 2. lov gir oss da følgende bevegelsesligning:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 L^2 v}{R}$$

Dette er en 1. ordens differensialligning for $v(t)$. Løsning:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{v} &= -\frac{B^2L^2}{mR}dt \\
\Rightarrow \ln v &= -\frac{B^2L^2}{mR}t + \ln k \\
\Rightarrow v(t) &= k\, e^{-B^2L^2t/mR} \\
\Rightarrow v(t) &= v_0\, e^{-B^2L^2t/mR}
\end{aligned}$$

der vi brukte initialbetingelsen $v(0) = v_0$.

d) Vi må regne ut hvor mye energi som tapes som varme i motstanden. Effekttapet er lik VI, der V er spenningsfallet over motstanden, dvs $V = RI$. Da effekttap er energitap pr tidsenhet, kan vi skrive

$$dW = P\,dt = VI\,dt = RI^2\,dt$$

for energien dW tapt på et tidsrom dt. Vi har i a funnet I uttrykt ved metallstangas hastighet v, så det er bare å sette inn. Totalt energitap må bli integralet av dW, dvs fra $t = 0$ til $t = \infty$:

$$\begin{aligned}
W &= \int dW \\
&= \int_0^\infty RI^2\,dt \\
&= \int_0^\infty R\left(\frac{BLv}{R}\right)^2 dt \\
&= \frac{B^2L^2v_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-2B^2L^2t/mR}\,dt \\
&= \frac{B^2L^2v_0^2}{R}\Bigg|_0^\infty \left(-\frac{mR}{2B^2L^2}\right) e^{-2B^2L^2t/mR} \\
&= mv_0^2/2
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

Oppgave 4

a) Magnetfelt fra lang, rett strømførende leder er $B(x) = \mu_0 I/2\pi x$, der x er avstanden fra lederen. På planet som her er omsluttet av den kvadratiske sløyfa peker magnetfeltet rett ut av papirplanet. x-aksen er valgt oppover. Magnetfeltet og "flateelementvektoren" $d\boldsymbol{A}$ er parallelle, så vi har rett og slett $d\phi = B \cdot dA$ for fluks gjennom flateelement dA. Her velger vi horisontal stripe med bredde a og høyde dx som flateelement. Total fluks omsluttet av den kvadratiske sløyfa får vi ved å "summmere" opp slike striper, dvs ved å integrere fra $x = d$ til $x = d + a$. (Vi har valgt $x = 0$ der den rette lederen ligger.)

$$\begin{aligned}
\phi &= \int d\phi \\
&= \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\Big|_d^{d+a} \ln x \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}
\end{aligned}
$$

b) Indusert ems er lik den tidsderiverte av omsluttet magnetisk fluks:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= -\frac{d\phi}{dt} \\
&= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\ln(d+a) - \ln d\right) \\
&= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left(\frac{1}{d+a}\frac{dd}{dt} - \frac{1}{d}\frac{dd}{dt}\right) \\
&= \frac{\mu_0 I a v}{2\pi}\frac{a}{(d+a)d}
\end{aligned}
$$

Her har vi brukt at $v = dd/dt$, og nå er ikke d en konstant avstand, men en avstand som øker lineært med tiden, f.eks. $d(t) = d_0 + vt$.
Fluksen opp av planet avtar med tiden. Da må indusert ems og tilhørende strøm bli *mot* klokka for å motvirke dette.

c) Hvis sløyfa trekkes mot høyre, endres ikke fluksen innenfor sløyfa. Dermed blir indusert ems lik null.