Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2005

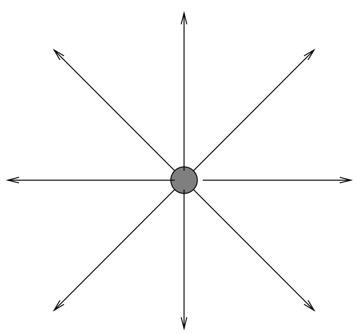
Løsningsforslag til øving 3

Veiledning 27. og 28. januar

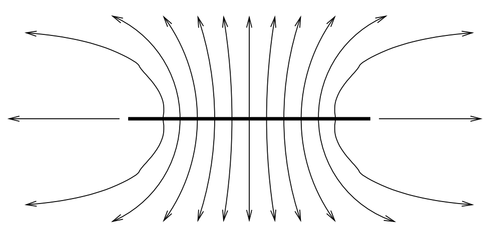
Oppgave 1

a)

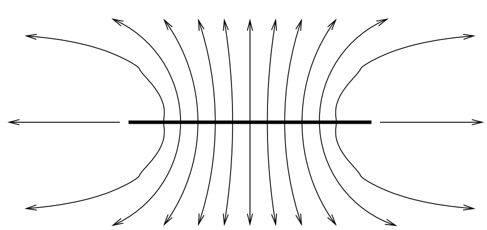
stav, plan normalt på, nært



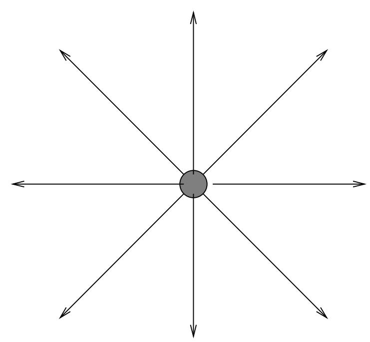
stav, plan inneholder staven, nært



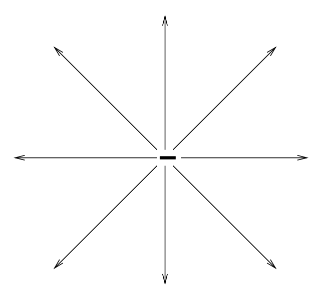
skive, plan normalt på, nært



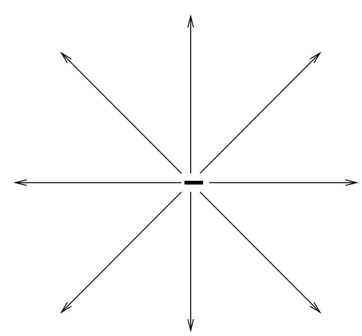
stav, plan normalt på, langt unna



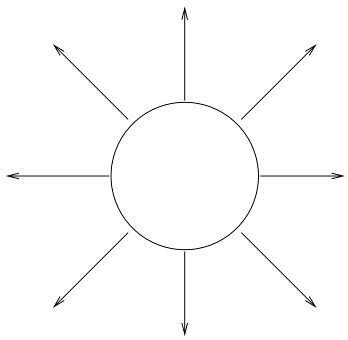
stav, plan inneholder staven, langt unna



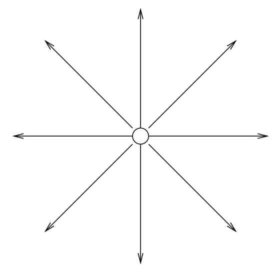
skive, plan normalt på, langt unna



skive, plan inneholder skiva, nært

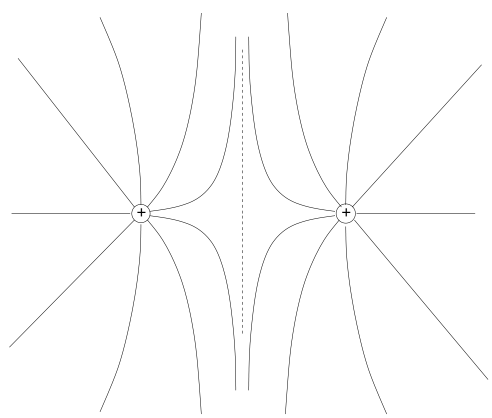


skive, plan inneholder skiva, langt unna

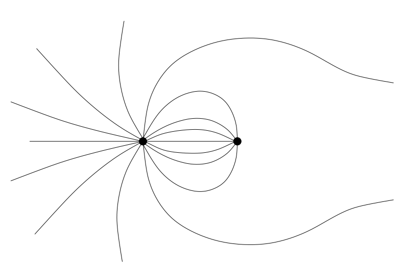


Kommentar: Disse skissene er bare *kvalitative*, ikke *kvantitative*. Legg spesielt merke til at langt unna (dvs, de fire i høyre kolonne) ser alt ut som en punktladning. På nært hold kan en som regel benytte symmetribetraktninger kombinert med det en vet om feltet i umiddelbar nærhet av eventuelle punktladninger til å tegne opp et temmelig korrekt bilde av feltlinjene.

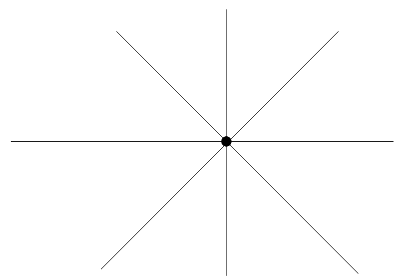
b) (i) Feltlinjer rundt to like store positive punktladninger:



(ii) Feltlinjer rundt punktladninger $-2q$ og q:
"Nærbilde" (like mange feltlinjer ut pr positiv ladning q som inn pr negativ ladning $-q$, så dobbelt så mange inn mot $-2q$ som ut fra q. De "resterende" må komme fra uendelig):

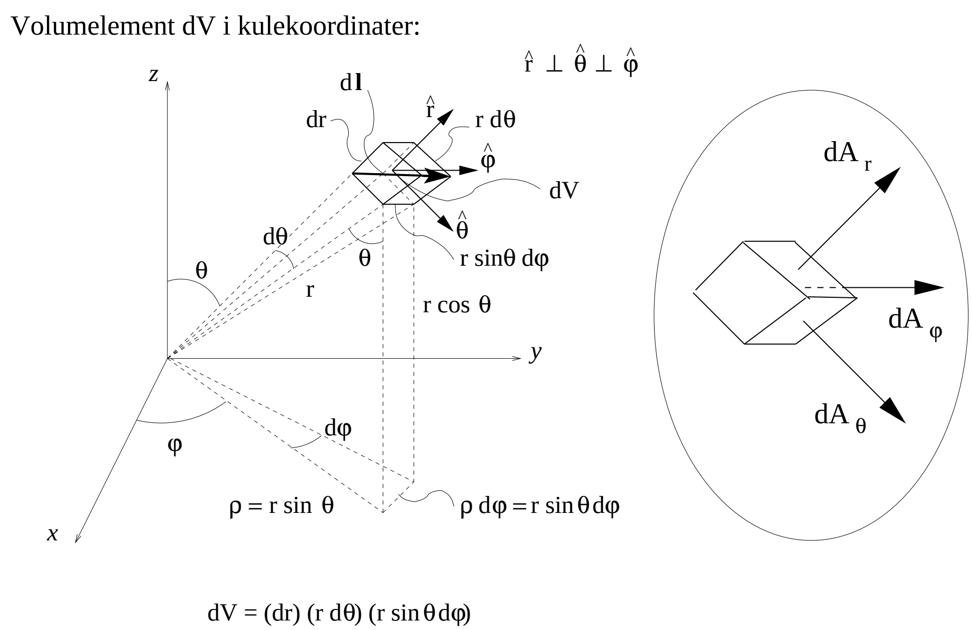


Riktig langt unna (da ser vi essensielt en punktladning $-2q + q = -q$, dvs feltlinjene går *inn* mot ladningen):



Oppgave 2

a) Vi benytter oss av tipsene gitt i oppgaveteksten og tar utgangspunkt i figuren fra "ukentlig sammendrag uke 3":



I figuren har vi tegnet inn et veielement $\boldsymbol{dl}$, som i kulekoordinater, i sin mest generelle form, består av en forflytning langs de tre ortogonale retningene spesifisert ved de ovenfor nevnte enhetsvektorer. Vi ser at en slik forflytning, fra punktet (r, θ, ϕ) til punktet $(r+dr, \theta+d\theta, \phi+d\phi)$, nettopp tilsvarer vektoren $\boldsymbol{dl}$ diagonalt gjennom volumelementet dV. Vi ser av figuren at denne vektoren har komponenter dr langs $\hat{r}$, $r\ d\theta$ langs $\hat{\theta}$ og $r \sin\theta\ d\phi$ langs $\hat{\phi}$. Altså:

$$\boldsymbol{dl} = dr\ \hat{r} + r\ d\theta\ \hat{\theta} + r \sin\theta\ d\phi\ \hat{\phi}$$

Legg merke til at mens komponentene til vektoren $\boldsymbol{dl}$ i kartesiske koordinater alltid er de samme $(dx,\ dy,\ dz)$, avhenger to av dem av "hvor vi er" i kulekoordinater: Komponenten langs $\hat{\theta}$ er proporsjonal med r, dvs avstanden til origo, mens komponenten langs $\hat{\phi}$ i tillegg avhenger av vinkelen θ (dvs "breddegraden", hvis vi tenker oss z-aksen gjennom polene og ekvator i xy-planet). F.eks. er $dl_\phi = r \sin 0 = 0$ hvis vi starter i $\theta = 0$. Ikke urimelig: Står vi på en av polene, vil et lite skritt alltid bli i retning sørover (evt nordover), aldri østover eller vestover. Står vi på ekvator, derimot, dvs i $\theta = \pi/2$, blir $dl_\phi = r \sin \pi/2 \; d\phi = r \; d\phi$. Ikke urimelig det heller: Her er øst, vest, sør og nord "likeverdige" retninger, så $dl_\theta = r \; d\theta$ og $dl_\phi = r \; d\phi$ bør her være "på samme form".

Fra figuren finner vi videre de tre flateelementene med flatenormaler henholdsvis langs $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ og $\hat{\phi}$:

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{A}_r &= (r \; d\theta)(r \sin\theta \; d\phi)\hat{r} \\
&= r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\phi \; \hat{r} \\
d\boldsymbol{A}_\theta &= (dr)(r \sin\theta \; d\phi)\hat{\theta} \\
&= r \; dr \sin\theta \; d\phi \; \hat{\theta} \\
d\boldsymbol{A}_\phi &= (dr)(r \; d\theta)\hat{\phi} \\
&= r \; dr \; d\theta \; \hat{\phi}
\end{aligned}
$$

Merk at disse tre er *vektorer*, med absoluttverdi lik arealet av flateelementet (f.eks. dA_r) og retning normalt på flaten (f.eks. $\hat{r}$). Vi trenger både *størrelse* og *orientering* for å gi en presis beskrivelse av en flate!

Endelig ser vi at volumelementet må bli

$$dV = (dr)(r \; d\theta)(r \sin\theta \; d\phi) = r^2 \; dr \sin\theta \; d\theta \; d\phi$$

b) Volumet av ei kule med radius R finner vi ved å integrere volumelementet dV over alle verdier av θ og ϕ og r fra 0 til R:

$$
\begin{aligned}
V(R) &= \int_{r<R} dV = \int_0^R r^2 \; dr \int_0^\pi \sin\theta \; d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{1}{3}R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3}R^3
\end{aligned}
$$

Merk at når vi integrerer over ϕ fra 0 til 2π, må vi integrere over θ fra 0 til π, og ikke 2π, for å dekke alle romvinkler ("retninger") *en* gang, og ikke to.

Arealet av ei kuleflate med radius R finner vi ved å integrere flateelementet dA_r (altså absoluttverdien av $d\boldsymbol{A}_r$) over alle verdier av θ og ϕ med $r = R$:

$$A(R) = \int_{r=R} dA_r = R^2 \int_0^\pi \sin\theta \; d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi R^2$$

c) Den oppgitte ladningstettheten er positiv (eller null) overalt inne i kula. Den vokser lineært med avstanden fra kulas sentrum. Videre fører leddet $\cos^2\theta$ til størst ladningstetthet på de to "polene" (dvs $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$) og minst ladningstetthet (null) i ekvatorplanet (dvs $\theta = \pi/2$). Et lite volumelement dV av kula inneholder en ladning

$$dq = \rho \, dV$$

Kulas totale ladning får vi ved å integrere dq over kulas volum. Vi bruker uttrykket for dV fra punkt a) og får:

$$\begin{aligned}
Q &= \int dq \\
&= \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_0 \frac{r}{R} \cos^2\theta r^2 \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\
&= \rho_0 \left(\int_{r=0}^{R} \frac{r^3}{R} \, dr \right) \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \right) \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \right) \\
&= \rho_0 \; |_0^R \; \frac{r^4}{4R} \; |_0^\pi \; \left(-\frac{1}{3} \cos^3\theta \right) \; |_0^{2\pi} \; \phi \\
&= \rho_0 \frac{R^3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\pi \\
&= \frac{\rho_0 \pi R^3}{3}
\end{aligned}$$

Har vi regnet riktig? Vel, vi har i hvert fall riktig dimensjon: Ladning pr volumenhet ρ_0 ganget med en faktor R^3, som har dimensjon som et volum.

Med andre ord: Intet "mystisk" med slike flerdimensjonale integraler: Det er bare å integrere over hver integrasjonsvariabel for seg. Her var integranden hele tiden uavhengig av vinkelen ϕ, så integralet over den gav bare en faktor 2π. Videre var selvsagt θ-avhengigheten i ρ i den siste oppgaven valgt med omhu, slik at vi fikk et enkelt løsbart integral over variabelen θ.

Legg videre merke til at vi som regel ikke "gidder" å skrive $\int\int\int dV$, men simpelthen $\int dV$, selv om det altså er tre integrasjoner involvert. Det vil alltid gå fram av sammenhengen om det er en linje, en flate eller et volum vi skal integrere over.