Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2005

Løsningsforslag til øving 4

Veiledning torsdag 3. februar og fredag 4. februar

Oppgave 1

Potensialforskjellen ΔV mellom to punkter er gitt ved

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

I denne oppgaven har vi et uniformt elektrisk felt $\boldsymbol{E} = E_0\ \hat{x}$, så vi kan skrive

$$\Delta V = -E_0\ \hat{x} \cdot \int_A^B d\boldsymbol{l}$$

der punktet A er origo, $(0, 0)$ og B er de tre punktene gitt i oppgaveteksten. Vi får:

(i)

$$\int_A^B d\boldsymbol{l} = \int_{(0,0)}^{(a,0)} d\boldsymbol{l} = a\ \hat{x}$$

slik at

$$\Delta V = -E_0\ \hat{x} \cdot a\ \hat{x} = -E_0 a$$

(ii)

$$\int_A^B d\boldsymbol{l} = \int_{(0,0)}^{(0,a)} d\boldsymbol{l} = a\ \hat{y}$$

slik at

$$\Delta V = -E_0\ \hat{x} \cdot a\ \hat{y} = 0$$

(iii)

$$\int_A^B d\boldsymbol{l} = \int_{(0,0)}^{(a,a)} d\boldsymbol{l} = a\ \hat{x} + a\ \hat{y}$$

slik at

$$\Delta V = -E_0\ \hat{x} \cdot (a\ \hat{x} + a\ \hat{y}) = -E_0 a$$

Oppgave 2

a) Med vårt valg av polarvinkel θ ser vi fra figuren at

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \\ z &= r \cos\theta \\ r &= \sqrt{x^2 + z^2} \end{aligned}$$

b) Vi bruker superposisjonsprinsippet for å bestemme potensialet fra de to punktladningene. Med punktet (x,z) i en avstand r_1 fra q og r_2 fra $-q$ får vi

$$\begin{aligned} V(x,z) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(z-a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(z+a/2)^2}}\right) \end{aligned}$$

Avstandene r_1 og r_2 uttrykt ved x og z ser vi direkte fra figuren.

Potensialet på x-aksen blir

$$V(x,0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2/4}}\right) = 0$$

Potensialet på z-aksen blir

$$V(0,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|}\right)$$

Legg merke til at vi her må bruke absoluttverditegn hvis vi vil ha *ett* uttrykk som gjelder på *hele* z-aksen. Med $z > a/2$:

$$\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|} = \frac{1}{z-a/2} - \frac{1}{z+a/2} = \frac{a}{z^2-a^2/4}$$

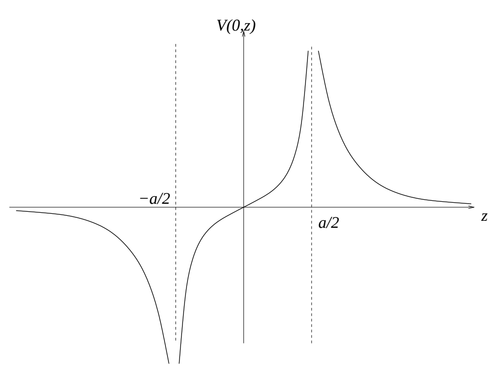
Med $z < -a/2$:

$$\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|} = -\frac{1}{z-a/2} + \frac{1}{z+a/2} = -\frac{a}{z^2-a^2/4}$$

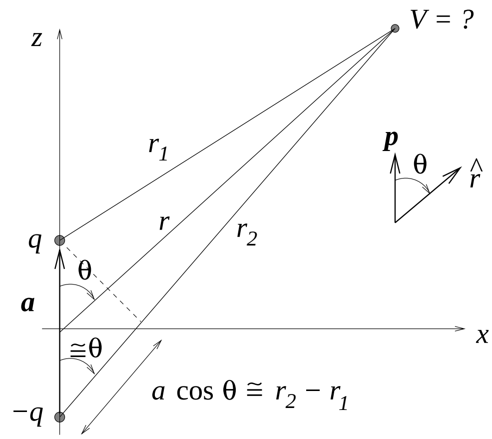
Med $-a/2 < z < a/2$:

$$\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|} = -\frac{1}{z-a/2} - \frac{1}{z+a/2} = -\frac{2z}{z^2-a^2/4} = \frac{2z}{a^2/4-z^2}$$

Skisse av $V(0,z)$:



c) Vi bruker tipset gitt i oppgaveteksten, samt betraktning av følgende figur, og får:



$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2} \\
&\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{a\cos\theta}{r^2} \\
&= \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\
&= \frac{pr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\
&= \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}
\end{aligned}
$$

Vi kan alternativt gå litt saktere fram: Fra figuren ser vi at

$$
\begin{aligned}
r_1 &\simeq r-\frac{a}{2}\cos\theta \\
r_2 &\simeq r+\frac{a}{2}\cos\theta
\end{aligned}
$$

Når $r \gg a$ kan vi rekkeutvikle både $1/r_1$ og $1/r_2$ omkring $1/r$ og får:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2} &\simeq \frac{1}{r-\frac{a}{2}\cos\theta}-\frac{1}{r+\frac{a}{2}\cos\theta} \\
&= \frac{1}{r}\left[\left(1-\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1}-\left(1+\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1}\right] \\
&\simeq \frac{1}{r}\left[1+\frac{a\cos\theta}{2r}-1+\frac{a\cos\theta}{2r}\right] \\
&= \frac{a\cos\theta}{r^2}
\end{aligned}
$$

Er det så *rimelig* at potensialet fra en elektrisk dipol faller av raskere enn potensialet fra en punktladning (dvs en elektrisk "monopol")? Det er det, fordi dipolens negative og positive ladning bidrar med motsatt fortegn til det totale potensialet. Dermed vil bidragene til potensialet fra de to punktladningene delvis oppheve hverandre. (På x-aksen vil de to bidragene *eksakt* oppheve hverandre.)

Ekstranøtten (ikke så viktig, mest for "moro skyld"):
I første omgang kunne en kanskje tenke seg å fortsette rekkeutviklingen ovenfor, og ta med så mange ledd at vi får tak i dominerende korreksjon. Tar vi med ett ledd til, får vi ingenting nytt, i og med at det neste leddet vil opptre to ganger og med motsatt fortegn og dermed kansellere. Vi må ta med to ledd til:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\left[\left(1-\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1}-\left(1+\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1}\right] \\
= &\frac{1}{r}\left[1+\frac{a\cos\theta}{2r}+\left(\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^2+\left(\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^3+\ldots-\left(1-\frac{a\cos\theta}{2r}+\left(\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^2-\left(\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^3+\ldots\right)\right] \\
= &\frac{a\cos\theta}{r^2}-\frac{a^3\cos^3\theta}{4r^4}+\ldots \\
= &\frac{a\cos\theta}{r^2}\left(1-\frac{a^2\cos^2\theta}{4r^2}+\ldots\right)
\end{aligned}$$

Her brukte vi rekkeutviklingen $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ (som gjelder når $|x| < 1$). Ikke noe dårlig forsøk dette, men det er en liten hake ved det hele: Utgangspunktet for hele rekkeutviklingen var i seg selv en tilnærmelse, nemlig

$$\begin{aligned}
r_1 &\simeq r - \frac{a}{2}\cos\theta \\
r_2 &\simeq r + \frac{a}{2}\cos\theta
\end{aligned}$$

Og feilen vi gjør i disse tilnærmelsene er av samme størrelsesorden som det korreksjonsleddet vi er på jakt etter!
Løsningen ligger i å gå helt tilbake til det eksakte uttrykket for V, med r_1 og r_2 uttrykt ved de kartesiske koordinatene x og z. Regningen er ikke direkte vanskelig, men såpass kronglete at jeg ikke tror jeg tar med noen flere detaljer her. Hvis jeg har regnet riktig, hvilket på ingen måte er sikkert, blir svaret

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=\frac{a\cos\theta}{r^2}\left[1-\frac{3a^2}{8r^2}\left(1-\frac{5}{3}\cos^2\theta\right)+\ldots\right]$$

Her har vi tatt med alle korreksjoner som er en *størrelsesorden* a^2/r^2 mindre enn det dominerende bidraget. Neste ledd i rekken vil bli ytterligere redusert, med en eller annen potens av den lille størrelsen a/r. Det første leddet som vi *ikke* tar med vil alltid være neglisjerbart i forhold til det siste leddet som vi tar med. (I vårt spesielle tilfelle, med unntak av retninger gitt ved $\cos^2\theta \simeq 3/5$, der vi ser at første korreksjonsledd faktisk forsvinner.)

Oppgave 3

a) **C**

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = m\boldsymbol{a}$$

Newtons 2. lov! Her er $q = -e$, så elektronets akselerasjon blir

$$\boldsymbol{a} = -\frac{e}{m}\boldsymbol{E}$$

altså mot venstre.

b) **C**

$$\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

dersom

$$d\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{E}$$

c) **B**

På samme måte som et legeme med null starthastighet faller i gravitasjonsfeltet fra f.eks. jorda, dvs beveger seg i retning lavere potensiell energi, vil en ladet partikkel med null starthastighet bevege seg i retning lavere potensiell energi i et elektrisk felt.

Matematisk: ($\boldsymbol{F}$ = kraft, q = ladning ($q < 0$), U = potensiell energi, V = potensial)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{E} = -|q|\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} &= -\nabla V \\ U &= qV = -|q|V \\ \boldsymbol{F} &= -\nabla U = -q\nabla V = |q|\nabla V \end{aligned}$$

Partikkelens bevegelse må selvsagt bli i samme retning som $\boldsymbol{F}$ (når starthastigheten er null), så vi ser at bevegelsen blir i motsatt retning av $\boldsymbol{E}$, og i retning høyere potensial V.

d) **D**

Total potensiell energi for et system med punktladninger er

$$U = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

der summen går over alle par av ladninger q_i og q_j i innbyrdes avstand r_{ij}. Her er alle ladninger like store i absoluttverdi. Vi har 4 par med motsatt fortegn i innbyrdes avstand 5 cm og 2 par (diagonalt) med likt fortegn i innbyrdes avstand $\sqrt{50}$ cm. Dermed får vi:

$$U = 9 \cdot 10^9 \cdot (9 \cdot 10^{-6})^2 \cdot \left[-\frac{4}{0.05} + \frac{2}{\sqrt{50} \cdot 10^{-2}} \right] \simeq -38 \text{ J}$$

e) **D**

Punktladningene Q_1 og Q_2 flyttes ikke, så innbyrdes potensiell energi for dette paret trenger vi ikke å bry oss om fordi den endres ikke når den tredje ladningen (elektronet) flyttes. Vi må regne ut potensiell energi som skyldes vekselvirkningen mellom elektronet og de to fastliggende ladningene, henholdsvis før og etter forflytningen. Alternativt kan vi regne ut potensialet fra ladningene Q_1 og Q_2 i punktene A og B, hhv V_A og V_B, og deretter endringen i potensiell energi, $\Delta U = U_B - U_A = -eV_B - (-e)V_A = -e(V_B - V_A)$. Potensialet i avstand r fra en punktladning q er

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

dvs Coulombpotensialet. De aktuelle avstandene her er 0.6 m (fra Q_1 til A og fra Q_2 til B) og $\sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1.0$ m (fra Q_1 til B og fra Q_2 til A). Dermed:

$$V_A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0}$$

og

$$V_B = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6}$$

som gir

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{2(Q_1 - Q_2)}{3 \cdot 4\pi\varepsilon_0} = -\frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (69 + 98) \cdot 10^{-9} = -1002 \text{ V}$$

og endelig

$$\Delta U = -e \cdot \Delta V \simeq +1 \text{ keV}$$

f) **B**

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = e \cdot \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = e \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{10} = 14.4 \text{ eV}$$

g) **D**

Energibevarelse gir

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

Dvs: Akselerasjon av en partikkel med ladning q og masse m gjennom en potensialforskjell V resulterer i at reduksjon i potensiell energi, qV, gir økning i kinetisk energi, $mv^2/2$. Like stor hastighet for de to partiklene betyr da at

$$\frac{q_\alpha V_\alpha}{m_\alpha} = \frac{q_{\text{Be}} V_{\text{Be}}}{m_{\text{Be}}}$$

med andre ord

$$\frac{V_{\text{Be}}}{V_\alpha} = \frac{q_\alpha m_{\text{Be}}}{q_{\text{Be}} m_\alpha} = \frac{2 \cdot 9}{4 \cdot 4} = \frac{9}{8}$$