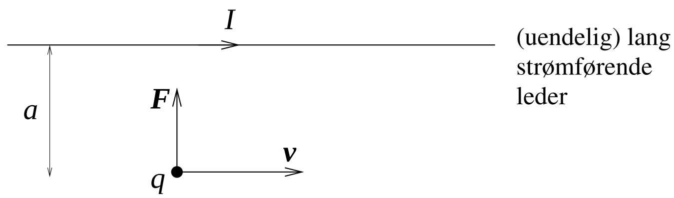
Institutt for fysikk, NTNU 5. april 2005
FY1003/TFY4155 Elektromagnetisme

MAGNETFELT OG MAGNETISME SOM RELATIVISTISK FENOMEN

(orienteringsstoff; ikke pensum til eksamen)

Utgangspunkt: Anta at vi kjenner til Coulombs lov og elektriske krefter. Vi vet derimot *ingenting* om magnetfelt og magnetisme.

Vi gjør så et eksperiment:



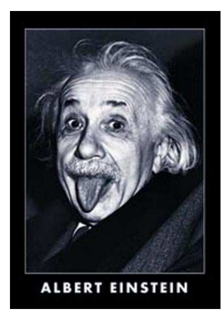
... og måler til vår store overraskelse en kraft på ladningen q:

$$F = k\frac{I}{a}qv$$

med retning inn mot lederen dersom $q > 0$.
(Retning vekk fra lederen dersom q eller v skifter fortegn.)

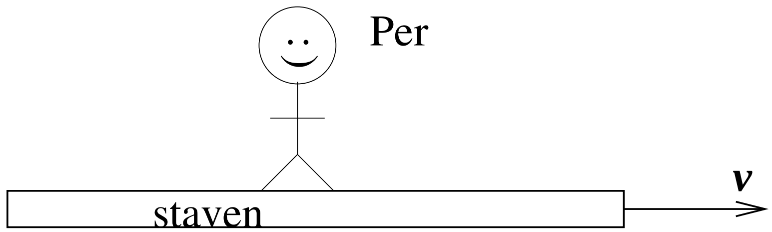
Lederen er *elektrisk nøytral* $\Rightarrow$ den elektriske kraften må være *null* !

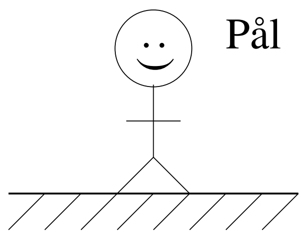
$\boxed{\text{HVOR KOMMER KRAFTEN } F \text{ FRA??}}$



Løsning: Relativitetsteori!

Lorentzkontraksjon:





Per: Stavens lengde er L.

Pål: Stavens lengde er $L/\gamma < L$.

Her er:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1$$

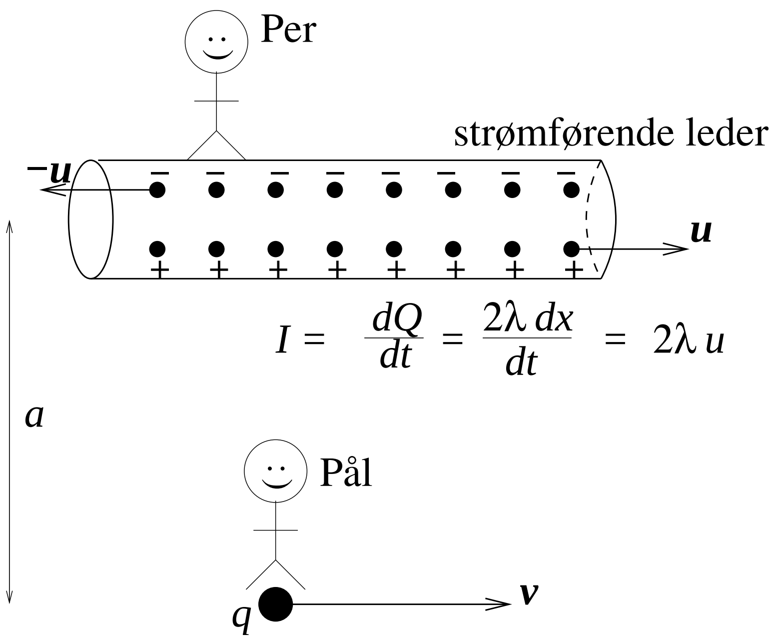
med c = lyshastigheten ($= 3 \cdot 10^8$ m/s) og v = hastigheten til staven og Per (i stavens lengderetning) i forhold til Pål.

Eksempel: Per er i ro i forhold til staven og måler dens lengde til 1 m. Pål ser en stav som har en hastighet $v = 3000$ km/s. Da er $v^2/c^2 = 10^{-4}$ og Pål vil si at stavens lengde er 0.999950 m, dvs 50 μm kortere.

Altså:

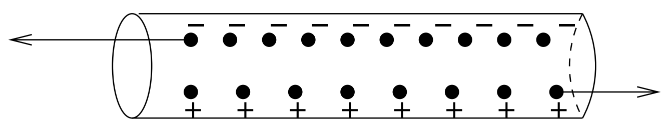
$$\boxed{\text{Objekter i bevegelse er kortere enn når de er i ro!}}$$

Konsekvenser av Lorentzkontraksjon for ladningen q som er i bevegelse langs den strømførende lederen:



Per: Lederen har negativ ladning $-\lambda$ pr lengdeenhet og positiv ladning λ pr lengdeenhet. Alt i alt er lederen *elektrisk nøytral*.

Dette ser Pål:



Pål: Lederen har negativ ladning $-\lambda_-$ pr lengdeenhet og positiv ladning λ_+ pr lengdeenhet. De negative ladningene har *størst* hastighet i forhold til meg. På grunn av *størst* Lorentzkontraksjon ligger derfor disse *tettere* enn de positive ladningene. Altså er $\lambda_- > \lambda_+$. Alt i alt er lederen *ikke elektrisk nøytral*; den har en *netto negativ ladning* $\Delta\lambda = -\lambda_- + \lambda_+ < 0$.

Dermed måler Pål en *tiltrekkende elektrisk kraft* på ladningen q:

$$F_{\text{Pal}} = F_e = qE = q \cdot \frac{\Delta\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

der vi har brukt at elektrisk felt i avstand a fra en uendelig lang stav med ladning $\Delta\lambda$ pr lengdeenhet er (se øving 2, oppgave 2d og øving 5, oppgave 3) $E = \Delta\lambda/2\pi\varepsilon_0 a$

So what? *Vi* er typisk i Pers situasjon, dvs på laben, i ro i forhold til lederen, og hvem har sagt at Per, som ser en nøytral leder, vil måle en kraft på q?

Jo, det sier Einstein, med sitt *relativitetsprinsipp*:

> Fysikkens lover gjelder i alle *inertialsystemer*, dvs i alle referansesystemer som er i ro eller i konstant hastighet.

Dermed: Hvis Pål måler en kraft på q, *må* også Per måle en kraft på q!

I forelesningene tok vi her rett og slett en snarvei og konstaterte at

$$F_{\text{Per}} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\; F_{\text{Pal}}$$

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda v u}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Den første av disse to ligningene skal vi ikke forsøke å utlede, men den uttrykker altså hvordan krefter, ifølge relativitetsteorien, *transformerer* mellom ulike referansesystemer som er i relativ bevegelse med hastighet $\boldsymbol{v}$. I vårt tilfelle er ladningen q i ro i Pål sitt referansesystem, i Per sitt referansesystem har den hastighet $\boldsymbol{v}$ (mot høyre). Hvis da Pål måler en kraft

$$\boldsymbol{F}_{\text{Pal}} = \boldsymbol{F}_{\text{Pal}}^{\parallel} + \boldsymbol{F}_{\text{Pal}}^{\perp}$$

der $\boldsymbol{F}_{\text{Pal}}^{\parallel}$ er komponenten av $\boldsymbol{F}_{\text{Pal}}$ parallelt med hastighetsvektoren $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{F}_{\text{Pal}}^{\perp}$ er komponenten av $\boldsymbol{F}_{\text{Pal}}$ normalt på hastighetsvektoren $\boldsymbol{v}$, så "kan det vises" at Per vil måle en kraft

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\text{Per}} &= \boldsymbol{F}_{\text{Per}}^{\parallel} + \boldsymbol{F}_{\text{Per}}^{\perp} \\ &= \boldsymbol{F}_{\text{Pal}}^{\parallel} + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{F}_{\text{Pal}}^{\perp}\end{aligned}$$

Med andre ord, en eventuell kraftkomponent parallelt med $\boldsymbol{v}$ blir den samme i de to referansesystemene (i vårt tilfelle er $F^{\parallel} = 0$), mens for kraftkomponenten normalt på $\boldsymbol{v}$ (og vår kraft er nettopp normalt på $\boldsymbol{v}$) har vi

$$\boldsymbol{F}_{\text{Per}}^{\perp} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{F}_{\text{Pal}}^{\perp} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\; F_{\text{Pal}}$$

som konstatert ovenfor.

Den andre av de to ligningene ovenfor kan vi utlede på bakgrunn av **Einsteins regel for addisjon av relative hastigheter**.

La oss ta for oss 3 objekter A, B og C. Dersom v_{AB} er hastigheten til A relativt B og v_{BC} er hastigheten til B relativt C, da ville en nok intuitivt tenke som Galilei og si at

$$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$$

må bli hastigheten til A relativt C. Tro det eller ei, men dette er faktisk ikke riktig! Og problemet oppstår i forbindelse med Einsteins 2. postulat (det 1. postulatet var relativitetsprinsippet, se ovenfor):

Lyshastigheten c i vakuum er konstant, uavhengig av kildens eller observatørens relative hastighet.

Nå ser du problemet med Galileis addisjonsformel: Dersom $v_{AB} = c$ (dvs A er et lyssignal som beveger seg med hastighet c i forhold til B), blir $v_{AC} \neq c$ (dvs C vil påstå at hastigheten til lyssignalet A ikke er lik c)!!

Løsningen har vi med Einsteins addisjonsregel:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB} \cdot v_{BC}/c^2}$$

Setter du nå $v_{AB} = c$, vil du også finne at $v_{AC} = c$, i samsvar med postulatet ovenfor.

Utstyrt med denne formelen kan vi nå regne ut hvor stor Lorentzkontraksjon ladningen q ser for henholdsvis de positive og de negative ladningsbærerne i den strømførende lederen.

Lederladningenes hastighet målt av Pål:

$$u_{\pm} = \frac{\pm u + (-v)}{1 + (\pm u) \cdot (-v)/c^2} = \pm \frac{u \mp v}{1 \mp uv/c^2}$$

Her er lederladningene objekt A (øvre fortegn for de positive), Pål og ladningen q er objekt C, mens Per tilsvarer objekt B. Dermed er $v_{AC} = u_{\pm} =$ lederladningenes hastighet relativt Pål og q, $v_{AB} = \pm u =$ lederladningenes hastighet relativt Per (dvs laboratoriet, der lederen ligger i ro), mens $v_{BC} = -v =$ Pers (og laboratoriets) hastighet relativt Pål (og ladningen q).

Da kan vi regne ut "Lorentzkontraksjonsfaktorene" $\gamma_\pm$ for de positive (øvre fortegn) og de negative (nedre fortegn) lederladningene, sett fra Pål og q sitt referansesystem:

$$
\begin{aligned}
\gamma_\pm &= \frac{1}{\sqrt{1-u_\pm^2/c^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(u\mp v)^2}{(1\mp uv/c^2)^2c^2}}} \\
&= \frac{1\mp uv/c^2}{\sqrt{(1\mp uv/c^2)^2-(u\mp v)^2/c^2}} \\
&= \frac{1\mp uv/c^2}{\sqrt{1\mp 2uv/c^2+u^2v^2/c^4-u^2/c^2-v^2/c^2\pm 2uv/c^2}} \\
&= \frac{1\mp uv/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)\cdot(1-v^2/c^2)}}
\end{aligned}
$$

Dette gjør oss i stand til å regne ut tettheten av lederladninger, observert fra Pål og q sitt referansesystem:

$$\lambda_\pm = \gamma_\pm \lambda_0$$

der (NB!) λ_0 er (antalls-)tettheten av lederladninger *målt av lederladningene selv*. Per, i ro i laboratoriet, måler antallstettheten λ for lederladningene. Ettersom disse har hastigheten u relativt Per, blir sammenhengen mellom λ og λ_0

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\lambda_0 \quad (> \lambda_0)$$

Dvs like stor Lorentzkontraksjon for positive og negative lederladninger, sett fra Pers ståsted. (Sagt på en annen måte: Fordi Per måler like stor antallstetthet for positive og negative lederladninger, og dermed en elektrisk nøytral leder, og samtidig like stor hastighet ($\pm$) u, betyr det at lederladningene selv også må måle en like stor antallstetthet λ_0, enten de nå er av det positive eller negative slaget.)

Tilbake til Pål og q, som nå altså ikke observerer en elektrisk nøytral leder, men derimot en ladet leder med ladning pr lengdeenhet

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda &= \lambda_+ - \lambda_- \\
&= \gamma_+\lambda_0 - \gamma_-\lambda_0 \\
&= (\gamma_+ - \gamma_-) \cdot \sqrt{1-u^2/c^2}\ \lambda \\
&= \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}\ \lambda}{\sqrt{(1-u^2/c^2)\cdot(1-v^2/c^2)}} \cdot \left[1 - \frac{uv}{c^2} - \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)\right] \\
&= -\frac{2\lambda vu}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}
\end{aligned}$$

Det negative fortegnet innebærer at Pål ser en *negativt* ladet leder, noe vi allerede fant ut på side 3. Nå har vi i tillegg altså regnet ut *hvor mye* negativ ladning Pål ser på lederen.

Dermed kjenner vi elektrisk kraft målt av Pål (side 3), hvoretter vi kan regne ut magnetisk kraft målt av Per, dvs i laboratoriet:

$$\begin{aligned}
F_{\text{Per}} = F_m &= \sqrt{1-v^2/c^2} \cdot q \cdot \frac{2\lambda vu}{2\pi\varepsilon_0 ac^2\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
&= qv\frac{2\lambda u}{2\pi\varepsilon_0 c^2 a} \\
&= qv\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 a}
\end{aligned}$$

= *magnetisk kraft* fra strømførende leder på ladning q i avstand a og med hastighet v langs lederen.

Dvs: Som vårt eksperiment, med

$$k = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}$$

(dvs en naturkonstant)

La oss skrive

$$F_{\text{Per}} = F_m = qvB$$

med

$$B = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 a}$$

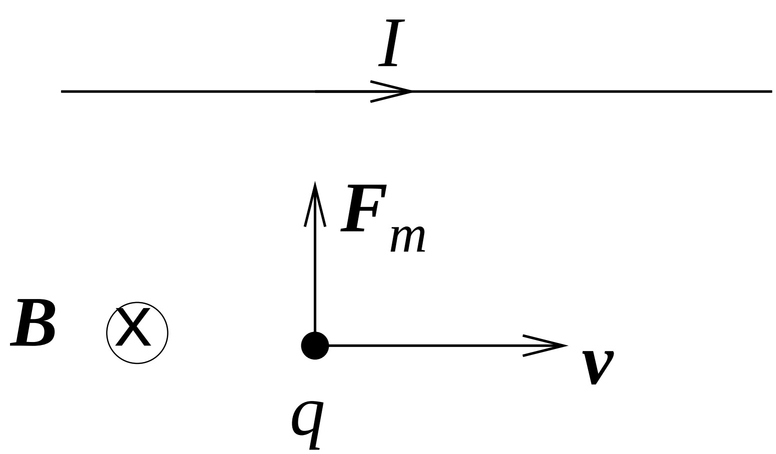
Størrelsen B er nettopp *magnetfeltet* (her: i avstand a fra en lang, rett strømførende leder med strøm I), og F_m er den *magnetiske kraften* på ladningen q med hastighet v.

Merk at vi har fått oppklart to viktige spørsmål:

Hvor kommer magnetfeltet fra?
Svar: Fra ladninger i bevegelse, dvs *elektrisk strøm*.

Hvordan virker den magnetiske kraften på en ladning i bevegelse?
Svar: $F_m = qvB$

Men hvordan uttrykke $F_m = qvB$ på *vektorform*? Både $\boldsymbol{F}_m$ og $\boldsymbol{v}$ er jo vektorer, men ikke parallelle vektorer....
Vi må ty til *kryssprodukt*! La $\boldsymbol{B}$ være en vektor som peker inn i planet:



Da ser vi at vi kan skrive:

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

KONKLUSJON:

Fra før: Elektrisk felt $\boldsymbol{E}$ lages av ladninger (i ro eller i bevegelse) og resulterer i elektrisk kraft på ladninger (i ro eller i bevegelse):

$$\boldsymbol{F}_e = q\boldsymbol{E}$$

Nå: Magnetfelt $\boldsymbol{B}$ lages av strøm (dvs ladninger i bevegelse) og resulterer i magnetisk kraft på ladninger i bevegelse:

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

Med både $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ til stede samtidig, påvirkes ladningen q med hastighet $\boldsymbol{v}$ av *Lorentzkraften*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$