Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2005

Sammendrag, uke 11 (15. og 16. mars)

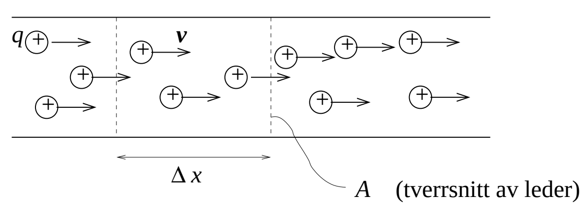
Elektrisk strøm.
[FGT 26.1; YF 25.1; TM 25.1; AF 24.1, 24.2; LHL 21.1; DJG 5.1.3]

Elektrisk strømstyrke = (positiv) ladning som passerer gjennom tverrsnitt av leder pr tidsenhet. I *metall* er *elektroner* ladningsbærerne, med ladning $-e$. Da går partikkelstrømmen og den elektriske strømmen i motsatt retning.

Med ladning ΔQ som passerer tverrsnitt A på tiden Δt:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \overset{\Delta t \to 0}{\to} \frac{dQ}{dt}$$

Enhet for strømstyrke: $[I] = [Q/t] = \mathrm{C/s} = \mathrm{A}$ (ampere)



Med $n = \Delta N/\Delta V$ ladningsbærere pr volumenhet, med midlere *driftshastighet* $\boldsymbol{v}$ og ladning q:

$$\Delta Q = q\Delta N = nq\Delta V = nq\Delta x A$$

$$\Rightarrow I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqA\frac{\Delta x}{\Delta t} = nqAv$$

Strømtetthet = strøm pr flateenhet:

$$j = \frac{I}{A}$$

Dermed:

$$j = nqv$$

Både strømtetthet j og driftshastighet v er vektorer:

$$\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}$$

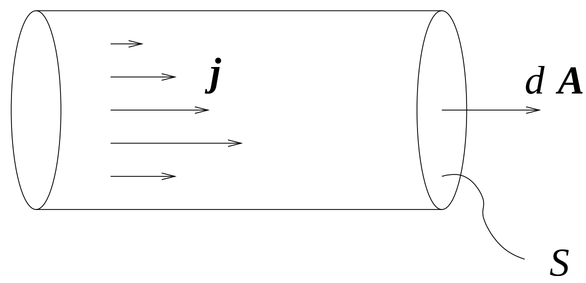
Dersom vi også betrakter tverrsnittet A som en vektor, blir I en *skalar* størrelse:

$$I = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A}$$

Strømmen I har da kun retning i forhold til lederen (positiv eller negativ).

Generalisering, dersom $\boldsymbol{j}$ ikke er konstant over lederens tverrsnitt:

$$I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A}$$



Ohms "lov"
[FGT 26.3; YF 25.2,25.3; TM 25.2; AF 24.3, LHL 21.2, DJG 7.1.1]

Må ha *drivende kraft* $\boldsymbol{F}$ for å få strøm gjennom lederen. Dersom

$$I \sim \boldsymbol{F} \sim \boldsymbol{E} \sim V$$

(dvs: dersom I er proporsjonal med den drivende kraften, og dermed også proporsjonal med det elektriske feltet og dermed også proporsjonal med potensialforskjellen V, så...) har vi såkalt *lineær respons*:

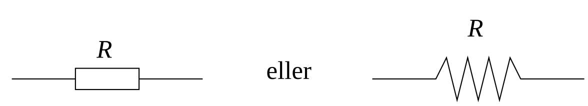
$$I = \frac{1}{R} V$$
$$\Rightarrow V = RI$$

som er Ohms lov.

Enhet for *motstand (resistans)*: $[R] = [V/I] = \mathrm{V/A} = \Omega$ (ohm)

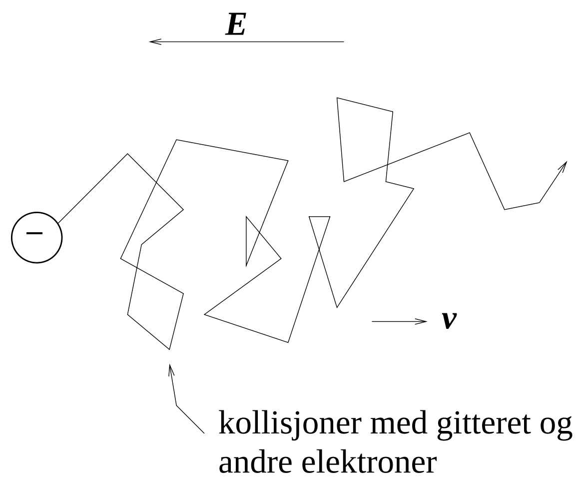
Ohmske materialer: Følger Ohms lov for store variasjoner i I
Ikke-ohmske materialer: Betydelige avvik fra lineær sammenheng mellom I og V

Kretssymbol for motstand:



Elektrisk ledningsevne (konduktivitet)
[FGT 26.2,26.3; YF 25.2,25.3; TM 25.2; AF 24.4, LHL 21.2, DJG 7.1.1]

Tilfeldig bevegelse (diffusjon) av ladningsbærere gjennom leder, *pluss* netto drift pga feltet $\boldsymbol{E}$



Midlere driftshastighet langs $-\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{v}$
Partikkelhastighet knyttet til temperaturen i lederen: $v_T \sim \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} \gg v$

Kommentar: En korrekt kvantemekanisk beskrivelse av elektronene i et metall vil faktisk resultere i en enda større partikkelhastighet. Det skyldes at elektronene er en type elementærpartikler som kalles *fermioner* og adlyder det såkalte *Pauliprinsippet*, som sier at man ikke kan ha mer enn ett fermion i hver tillatte "tilstand". Dette tvinger elektronene inn i tilstander med høyere energi enn de ville ha hatt hvis de var klassiske partikler. Mer om det i senere kurs i kvantemekanikk og faste stoffers fysikk!

For ohmsk materiale: $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{E}$

Dette gir da lineær sammenheng mellom strømtetthet og elektrisk felt:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

som definerer materialets *konduktivitet* σ. Dette er også Ohms lov.

Leder med lengde l, (konstant) tverrsnitt A og konduktivitet σ har resistans

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}$$

Bevis:

$$I = jA = \sigma EA = \sigma \frac{V}{l} A = \frac{1}{R} V \quad \Rightarrow \quad R = \frac{l}{\sigma A}$$

Her har vi antatt at E er konstant i lederen (som er OK, se Griffiths, Example 7.3), og dermed lik spenningsfallet over lederen V dividert med lengden l. Det siste likhetstegnet i ligningen over er rett og slett Ohms lov, dvs definisjonen av R.

Kan nå innføre *konduktans*:

$$G = \frac{1}{R}$$

og *resistivitet*:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

σ og ρ er materialspesifikke størrelser
R og G avhenger i tillegg av lederens størrelse og utforming

Enheter:
$[G] = \Omega^{-1}$
$[\sigma] = [l/RA] = \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$
$[\rho] = \Omega\ \mathrm{m}$

Temperaturavhengigheten til ρ
[FGT 26.3; YF 25.2; TM 25.2; LHL 21.2]

Økt temperatur T resulterer i sterkere gittervibrasjoner og dermed hyppigere kollisjoner mellom elektronene og gitteret. Dette gir redusert driftshastighet v og redusert konduktivitet σ, dvs økt resistivitet ρ.
Empirisk gjelder over "et visst temperaturintervall" for metaller:

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Her er T_0 en valgt referansetemperatur, f.eks. 300 K, $\rho_0 = \rho(T_0)$ målt resistivitet ved T_0, og α målt temperaturkoeffisient, dvs helning på $\rho(T)/\rho_0$ plottet som funksjon av T.

Elektrisk effekt
[FGT 26.7; YF 25.5; TM 25.3; AF 24.5, LHL 22.2, DJG 7.1]

Endring i potensiell energi, ΔU, for ladning ΔQ som går gjennom et spenningsfall V:

$$\Delta U = \Delta Q \cdot V$$

Energibevarelse:
Uten kollisjoner: Får akselerasjon av ladningsbærerne og økt kinetisk energi.
Med kollisjoner (noe vi faktisk har!), dvs motstand R: ΔU "tapes" som *varme* i motstanden.

Effekttap = energitap pr tidsenhet:

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = V\frac{\Delta Q}{\Delta t} = V \cdot I$$

Hvis vi har ohmsk materiale ($V = RI$):

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

Enhet for effekt:

$$[P] = [\frac{U}{t}] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}\ \ (\text{watt})$$

Kobling av flere motstander
[FGT 26.4; YF 26.1; TM 25.4; AF 24.6, LHL 21.3]

Seriekobling av N motstander R_i, $i = 1, .., N$:

$$R = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

Parallellkobling av N motstander R_i, $i = 1, .., N$:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

Fra øving 9, **kobling av flere kapasitanser**
[FGT 25.4; YF 24.2; TM 24.4; AF Ex. 25.8, LHL 20.2]:

Seriekobling av N kapasitanser C_i, $i = 1, .., N$:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

Parallellkobling av N kapasitanser C_i, $i = 1, .., N$:

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

I disse uttrykkene representerer R og C henholdsvis den ekvivalente motstanden og ekvivalente kapasitansen dersom vi erstatter alle de serie- eller parallellkoblede elementene med en enkelt motstand eller kapasitans.

Et par kommentarer!

- Har ikke vi blitt enige om at inne i en elektrisk leder er det elektriske feltet lik null? Jo, men bare dersom vi har *elektrostatisk likevekt*! Når det går en elektrisk strøm gjennom lederen, har vi ikke lenger elektrostatisk likevekt! Og har vi ikke elektrostatisk likevekt, behøver ikke lenger det elektriske feltet å være lik null.

- I forelesningene slo jeg simpelthen fast, fullstendig uten bevis, at dersom vi har en (rett) leder med samme tverrsnitt langs hele lederen, og som fører en *stasjonær* (dvs tidsuavhengig) elektrisk strøm I, så er det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ *uniformt* overalt inne i lederen. Jeg har ikke tenkt å bevise dette resultatet her heller. (Men se eksempel 7.3 i Griffiths, hvis du er interessert.) Imidlertid er det bryet verdt å se litt på *konsekvensene* av at det elektriske feltet er uniformt inne i en slik leder. Det betyr for eksempel at det ikke er noe netto ladning noen steder inne i lederen, på samme måte som vi har funnet tidligere inne i en leder i elektrostatisk likevekt. Uniformt elektrisk felt betyr at uansett hva slags volumelement, stort eller lite, inne i lederen vi ser på, må all elektrisk fluks inn i volumelementet også gå ut av volumelementet igjen. Men da er jo netto ladning inne i volumelementet lik null, ifølge Gauss' lov! Konklusjon: Potensialforskjellen over lederen, og det (uniforme) elektriske feltet inne i lederen, er "skapt" av ladninger som må befinne seg på lederens overflate. (Nøyaktig *hvordan* ladningsfordelingen på lederens overflate blir er som regel ikke så lett å beregne...!)

- Ulike materialer har svært ulike verdier for resistivitet. Eksempler: Sølv har $\rho = 1.59 \cdot 10^{-8}$ mens diamant har $\rho = 2.7$ (begge i enheten Ωm og ved romtemperatur). Ulike typer glass har typisk resistiviteter i området $10^{10} - 10^{14}$. Vent litt, var vi ikke enige om at glass var en isolator, dvs uten mobile ladninger, og dermed null ledningsevne, eller uendelig resistivitet? Vel, som så mye annet her i verden er dette bare "nesten sant". Det *er* sant ved null temperatur. I praksis, ved "normale" temperaturer, har vi alltids et og annet elektron som er løsrevet fra sitt "opprinnelige" atom. I tillegg har vi alltid *urenheter* i større eller mindre grad, og slike "fremmedatomer" kan også bidra med frie ladninger og derved gi en viss elektrisk ledningsevne. Men: Legg merke til de enorme forskjellene i tallverdier: Forholdet mellom resistiviteten til glass og sølv kan bli opptil 10^{22}. En motstand i en elektrisk krets er typisk laget av et materiale med betydelig større resistivitet enn metallet i tilførselsledningene. Vi kan derfor med god tilnærmelse betrakte de metalliske tilførselsledningene som ekvipotensialer, dvs med null spenningsfall over dem, og dermed også null elektrisk felt inne i dem. Ettersom vi har sammenhengen $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$, ser vi at null felt samtidig med en strømtetthet som *ikke* er null må bety $\sigma \to \infty$. Da snakker vi om at vi har en *perfekt* leder. Og i dette kurset betyr "isolator" et materiale med uendelig resistivitet, eller $\sigma = 0$. Da ser vi at $j = 0$ *alltid*, selvom $E \neq 0$.