Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2005

Sammendrag, uke 18 (3. og 4. mai)

Selvinduktans

[FGT 32.1; YF 30.2; TM 28.6; AF 27.8; LHL 25.1; DJG 7.2.3]

En strøm I i ei strømsløyfe resulterer i et magnetfelt $\boldsymbol{B}$ i området omkring. Dette feltet kan vi, i hvert fall i prinsipp, regne ut ved hjelp av Biot-Savarts lov:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

(se f.eks. uke14.pdf). Magnetfeltet fra sløyfa resulterer i en magnetisk fluks gjennom sløyfa selv:

$$\phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_S \left\{ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2} \right\} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Uansett hva dette gufne integralet måtte være, kan vi uttrykke det på formen

$$\phi = LI$$

forutsatt at I er konstant i sløyfa, dvs den samme alle steder i sløyfa. (Og det må den jo være hvis det ikke skal hope seg opp med ladning noe sted...!)
Faktoren L er *selvinduktansen* til sløyfa og uttrykker hvor mye magnetisk fluks vi får "gjennom" (dvs omsluttet av) sløyfa når det går en strøm i sløyfa:

$$L = \frac{\phi}{I}$$

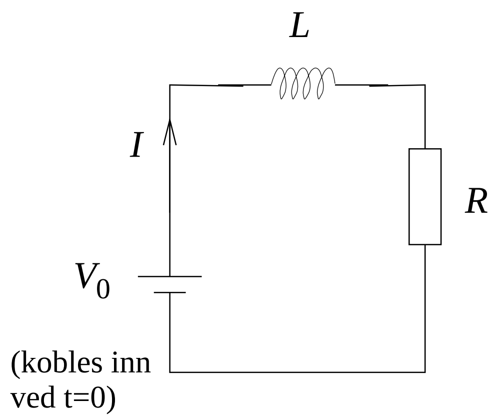
Enhet for selvinduktans: $[L] = [\phi_m/I] = [B \cdot A/I] = \mathrm{T{\cdot}m^2/A} \equiv \mathrm{H}$ (henry)

Selvinduksjon:
Tidsavhengig strøm $I(t)$ i sløyfe gir tidsavhengig fluks $\phi(t)$ gjennom sløyfa, og dermed indusert ems i sløyfa:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

RL-krets
[FGT 32.4; YF 30.4; TM 28.8; AF Ex 27.5; LHL 25.2; DJG Ex 7.12]

Ser på seriekobling av *induktans* L (f.eks. en spole) og *resistans* R. Et batteri med likespenning V_0 kobles til kretsen ved tidspunktet $t = 0$.



Total ems i kretsen er da

$$V_0 - L\frac{dI}{dt}$$

der det siste leddet er indusert "motspenning" over induktansen når vi prøver å *endre* strømstyrken gjennom den.
Ifølge Kirchhoffs spenningsregel (evt "sløyferegel") må denne totale emsen i sløyfa tilsvare spenningsfallet over motstanden R, med andre ord

$$V_0 - L\frac{dI}{dt} = RI$$

eller

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V_0$$

Dette er nøyaktig samme type 1. ordens differensialligning for strømmen I som det vi hadde for kondensatorladningen Q da vi studerte opplading av kondensator i en RC-krets (se uke13.pdf, side 4). Løsningen blir

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

der vi har brukt initialbetingelsen $I(0) = 0$. (Før innkobling av batteriet er åpenbart $I = 0$. I tidspunktet $t = 0$ kan *ikke* strømmen i kretsen "hoppe" opp til en endelig verdi forskjellig fra null. Det måtte i såfall innebære at $dI/dt \to \infty$ i $t = 0$, hvilket igjen ville innebære en uendelig stor motspenning over induktansen. Det er rett og slett ikke fysisk mulig! Altså må I være kontinuerlig i $t = 0$, og vi kan sette $I(0) = 0$.)

Tidskonstant for endring av strømmen:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Verdien av τ gir en *størrelsesorden* for hvor lang tid det tar å øke strømmen i en slik RL-krets fra 0 til maksimal verdi V_0/R:

$$I(t \to \infty) = \frac{V_0}{R}$$

Energi i magnetfelt

[FGT 32.2, 32.3; YF 30.3; TM 28.7; AF 26.8, 27.11; LHL 25.3; DJG 7.2.4]

La oss regne ut hvor mye energi som må tilføres en spole med induktans L når vi øker strømmen gjennom spoletråden fra $i = 0$ til en "sluttverdi" $i = I$.
Tilført energi ved å øke strømmen fra i til $i + di$:

$$dU_B = P\ dt = iv\ dt = iL\frac{di}{dt}dt = Li\ di$$

Her er $P = iv$ tilført effekt, og $v = Ldi/dt$ spenningen over spolen idet vi endrer strømmen fra i til $i + di$.
Dermed blir total energi tilført for å øke strømmen fra 0 til I lik

$$U_B = \int dU_B = L \int_0^I i\ di = \frac{1}{2}LI^2$$

Denne energien kan vi nå assosiere med magnetfeltet B inne i spolen. Anta at spolen er tilnærmet uendelig lang, med N viklinger på hele lengden l. Tverrsnittet av spolen har areal A. Da er magnetfeltet inne i spolen

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

(På utsiden av spolen er magnetfeltet null.) Total magnetisk fluks gjennom de N viklingene på spolen blir

$$\phi_m = NAB = NA\mu_0 \frac{N}{l} I$$

som også kan skrives på formen

$$\phi_m = LI$$

der L er spolens (selv-)induktans. Med dette kan vi omforme uttrykket for energien U_B:

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{NAB}{I}I^2 = \frac{1}{2}NAB \cdot \frac{Bl}{\mu_0 N} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \cdot Al$$

Her er Al lik volumet inne i spolen, så vi ser at vi har en *energitetthet* (dvs energi pr volumenhet) assosiert med magnetfeltet B:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Fra før har vi funnet at vi har en energitetthet u_E assosiert med et elektrisk felt E:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Dermed blir *total energitetthet i et elektromagnetisk felt*:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Kommentar: Dette uttrykket er "alltid riktig", i den forstand at u representerer energien "lagret" i feltene E og B. I litteraturen "risikerer" du å støte på formelen

$$u = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2$$

for total energitetthet dersom vi har polariserbare og/eller magnetiserbare medier tilstede. (I den siste overgangen her brukte vi at $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, med ε = mediets permittivitet og μ = mediets permeabilitet.)
Disse to uttrykkene for u er ikke identiske, og kan derfor ikke representere den samme energitettheten. Det siste uttrykket for u inkluderer da også et bidrag som ikke er direkte "lagret" i feltene, nemlig den "elastiske" energien knyttet til polarisering og magnetisering, dvs innrettingen av elektriske og magnetiske dipoler.
I den grad noe av dette blir aktuelt til eksamen, skal vi kun bry oss om *feltenergien* gitt ved

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

LC-krets
[FGT 32.5; YF 30.5; TM 29.5; AF 27.9; LHL 27.1; DJG Problem 7.25]

Kirchhoffs spenningsregel gir

$$-L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

der første ledd er indusert (mot-)spenning i induktansen og andre ledd er spenningsfall i kondensatoren; Q og I er hhv ladningen på kondensatoren og strømmen i kretsen. Innsetting av $I = dQ/dt$ gir

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

som har løsning

$$Q(t) = \tilde{Q}\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Vinkelfrekvensen ω_0 bestemmes ved innsetting:

$$-\omega_0^2 Q + \frac{1}{LC}Q = 0$$

dvs

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Integrasjonskonstantene $\tilde{Q}$ og α fastlegges ved hjelp av to initialbetingelser. Eksempelvis: $Q(0) = Q_0$ og $I(0) = 0$. Det gir $\alpha = 0$ og $\tilde{Q} = Q_0$ slik at

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 \cos \omega_0 t \\ I(t) &= -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t = \omega_0 Q_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2) \end{aligned}$$

Med andre ord: Ladningen på kondensatoren $Q(t)$ og strømmen i kretsen $I(t)$ varierer *harmonisk* med tiden, med en innbyrdes *faseforskyvning* på $\pi/2$, dvs 90 grader.
Vi har energibevarelse:
Elektrisk energi lagret i det elektriske feltet mellom kondensatorplatene:

$$U_E = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2C} Q_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Magnetisk energi lagret i magnetfeltet i induktansen (spolen):

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} L \cdot \frac{1}{LC} \cdot Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2C} Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Total energi i kretsen:

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2C} Q_0^2$$

som er konstant.

Ampere-Maxwells lov
Ikke pensum, men se eget notat på fagets hjemmeside.