

Sammendrag, uke 8 (22. og 23. februar)

Elektrisk polarisering. Dielektrika.

[FGT 25.5, 25.6; YF 24.4, 24.5; TM 24.5, 24.6; AF 25.6, 25.7; LHL 20.5; DJG 4.1]

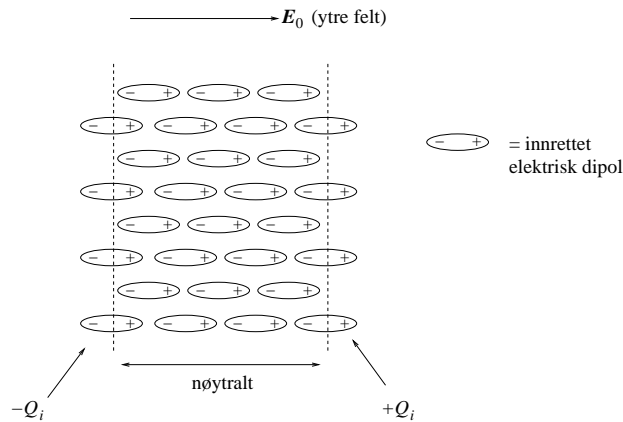
Isolator: Ingen mobile (frie) ladninger (men *bundne* ladninger)

Dielektrikum: Polariserbar isolator

Plasseres et dielektrikum i et ytre elektrisk felt \mathbf{E}_0 , får vi innretning av (molekylære) elektriske dipoler langs \mathbf{E}_0 , jfr øving 6, oppgave 2. (Eventuelt: Polarisering internt i atomer og upolare molekyler som i utgangspunktet har null elektrisk dipolmoment.)

Netto (makroskopisk) effekt av det ytre feltet:

Forskyvning av bundne ladninger



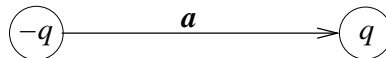
$\pm Q_i$ = indusert nettoladning på isolatorens overflater

Polarisering = dipolmoment pr volumenhet:

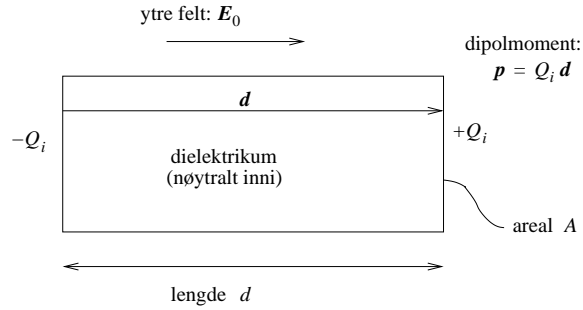
$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{V}$$

Elektrisk dipolmoment (repetisjon!):

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a}$$



Dielektrikum i ytre felt \mathbf{E}_0 :



Volum: $V = Ad$

Tetthet av induisert overflateladning: $\sigma_i = Q_i/A$

Dermed:

Totalt dipolmoment: $p = |\mathbf{p}| = Q_i d = \sigma_i Ad = \sigma_i V$

Polarisering: $\mathbf{P} = |\mathbf{P}| = p/V = \sigma_i$

Generelt: $\mathbf{P} \cdot \hat{n} = P_\perp = \sigma_i$

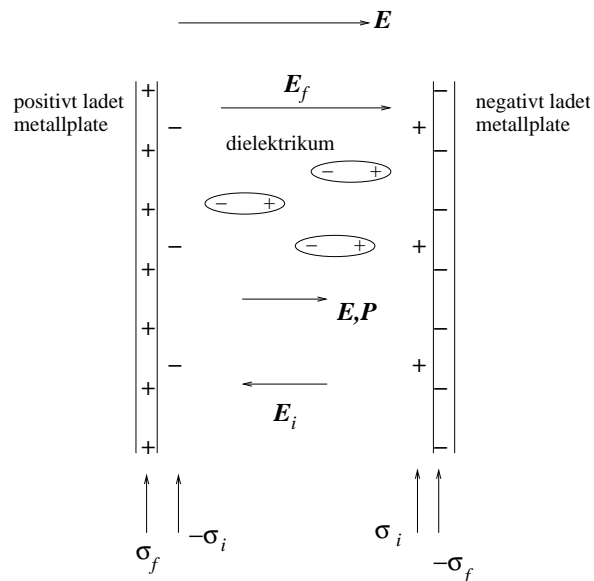
(\hat{n} = flatenormal, P_\perp = komponenten av \mathbf{P} som står normalt på overflaten)

Elektrisk forskyvning.

[FGT 25.6; YF 24.6; TM 24.6; AF 25.8; LHL 20.5; DJG 4.3]

Bruker idealisert system som vi har sett på før:

Motsatt ladete metallplater (uendelig store), nå med dielektrikum i mellom:



Fri ladning pr flateenhet på metallplatene: σ_f

... som genererer elektrisk felt mellom platene: $E_f = \sigma_f / \epsilon_0$ (null felt utenfor platene)

Indusert ladning pr flateenhet på overflaten av dielektrikum: σ_i

... som genererer elektrisk felt mellom platene: $E_i = \sigma_i / \epsilon_0$

Totalt felt mellom platene: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_f + \mathbf{E}_i \Rightarrow E = |\mathbf{E}| = E_f - E_i = (\sigma_f - \sigma_i) / \epsilon_0$

Netto ladning på overflatene: $\pm\sigma = \pm(\sigma_f - \sigma_i)$

... som genererer totalt felt mellom platene: $E = \sigma / \epsilon_0 = (\sigma_f - \sigma_i) / \epsilon_0$, OK!

Vi har: $\sigma_i = P$ = polariseringen i dielektrikumet (= dipolmoment pr volumenhet)

Dermed:

$$\sigma_f = \sigma + \sigma_i = \epsilon_0 E + P$$

Vi ser altså at tettheten av *fri* ladning σ_f er bestemt av kombinasjonen $\epsilon_0 E + P$. I endel tilfeller, f.eks. i endel eksperimenter, er det nettopp den frie ladningen vi har kontroll over. Med dielektrikum til stede er det derfor ofte *hensiktsmessig* å "referere til" vektorfeltet

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

\mathbf{D} kalles *elektrisk forskyvning*.

Her:

$$D = |\mathbf{D}| = \sigma_f$$

Generelt (som vi også fant for \mathbf{P}):

$$\sigma_f = \mathbf{D} \cdot \hat{n} = D_{\perp}$$

der D_{\perp} er normalkomponenten av den elektriske forskyvningen.

Gauss' lov for \mathbf{D} :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_f$$

der Q_f er netto *fri* ladning innenfor den lukkede flaten S . (Netto total ladning innenfor S er $Q_{\text{in}} = Q_f - Q_i$, med $-Q_i =$ netto *bundet* ladning, knyttet til polariseringen \mathbf{P} , innenfor S .)

Elektrisk susceptibilitet og permittivitet.

[FGT 25.5; YF 24.4; TM 24.5, 24.6; AF 25.9; LHL 20.5; DJG 4.4]

Lineær respons: \mathbf{P} proporsjonal med \mathbf{E} , dvs vi kan skrive

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

der vi har innført $\chi_e =$ elektrisk susceptibilitet.

NB: En slik lineær sammenheng mellom \mathbf{P} og \mathbf{E} gjelder *ikke alltid*, men i dette kurset skal vi hele tiden anta at det gjelder. Merk også at \mathbf{E} er det *totale* elektriske feltet, *ikke bare* det ytre feltet.

Dermed:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ &= (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ &= \varepsilon \mathbf{E} \end{aligned}$$

Her har vi innført størrelsene

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e =$ relativ permittivitet (“dielektrisitetskonstanten”)

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 =$ mediets permittivitet

Enheter:

$[\chi_e] = [\varepsilon_r] = 1$ (dimensjonsløs)

$[\varepsilon] = [\varepsilon_0] = \text{C}^2/\text{Nm}^2$

Punktladning q i dielektrikum med permittivitet ε :

Elektrisk felt: $\mathbf{E}(r) = (q/4\pi\varepsilon r^2)\hat{r}$

Elektrisk potensial: $V(r) = q/4\pi\varepsilon r$

Dvs: Som for punktladning i vakuum, men med $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon > \varepsilon_0$; mediet polariseres og *skjermer* punktladningen slik at E og V reduseres med en faktor $1/\varepsilon_r$.

Kondensator og kapasitans.

[FGT 25.1, 25.5; YF 24.1, 24.2; TM 24.4; AF 25.10; LHL 20.1; DJG 2.5.4]

Kondensator = to adskilte elektriske ledere med ladning $\pm Q$ (Eventuelt: En elektrisk leder med ladning Q , den andre tenkt flyttet uendelig langt bort.)

Coulombs lov \Rightarrow elektrisk felt i området omkring lederne er proporsjonalt med Q

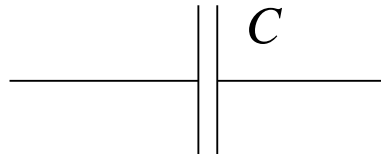
Dermed følger også at *potensialforskjellen* ΔV mellom de to lederne er proporsjonal med Q :

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$C =$ kondensatorens *kapasitans*

Enhet for kapasitans: $[C] = [Q/\Delta V] = \text{C}/\text{V} \equiv \text{F}$ (farad)

Symbol i elektriske kretser:



C er en *geometrisk faktor*, avhengig av ledernes utforming og innbyrdes avstand, og dessuten det mellomliggende mediet.

Kapasitans er, pr definisjon, en *positiv* størrelse.

Utregning av C for et gitt system vil gå ut på å bestemme potensialforskjellen mellom de to lederne, $\Delta V = V_+ - V_-$, for en gitt ladning $\pm Q$.

Parallellplatekondensator, luftfylt (vakuum), med plateareal A , plateavstand d :

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Parallellplatekondensator, fylt med dielektrikum med relativ permittivitet ε_r , plateareal A , plateavstand d :

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

Dersom området mellom kondensatorens to ledere, som i utgangspunktet er fylt med luft (\simeq vakuum), helt eller delvis fylles med et dielektrikum, vil kondensatorens kapasitans alltid bli større enn den var med bare luft. (Det samme gjelder også hvis området med luft/vakuum erstattes med metall.)

Energi assosiert med elektrisk felt

[FGT 25.3; YF 24.3; TM 24.3; AF 25.11; LHL 20.4; DJG 2.4.3]

Potensiell energitetthet, dvs potensiell energi pr volumenhet, er med elektrisk felt E lik

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Vi hadde også at potensiell energi kunne “assosieres” med den elektriske ladningen: Dersom et “system” har elektrisk potensial (f.eks. relativt til potensialet uendelig langt borte, som vi som regel kan sette lik null) $v(q)$ når det har ladning q , må vi utføre et arbeid $dW = v(q) dq$ for å øke ladningen fra q til $q + dq$. Følgelig blir totalt arbeid, og dermed også total “lagret” potensiell energi i systemet, lik

$$W = U = \int_0^Q v(q) dq$$

for å lade opp systemet fra null ladning til endelig ladning Q .

Alternativt kan vi altså regne ut lagret potensiell energi ved å integrere opp energitettheten u over hele volumet V :

$$U = \int_V u dV = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV$$

(Merk at her står V for *volum* og ikke potensial. Dessuten: Ikke la deg forvirre av notasjonen brukt ovenfor: Jeg brukte $v(q)$ for å angi potensialforskjellen mellom de to kondensatorplatene med ladning q og $-q$, dvs på et vilkårlig tidspunkt underveis i oppladingen. Grunnen var at jeg ønsket å reservere V for potensialforskjellen mellom platene når de var ferdig oppladet, dvs med ladning Q og $-Q$. Jeg forsøker å minimere ”sammenblanding” av symboler, men V bruker jeg altså for potensial *og* volum.)