Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2006

Løsningsforslag til øving 11

Veiledning torsdag 23. mars

Oppgave 1

a) Dette systemet kan oppfattes som en seriekobling av tre motstander: de to 60 cm lange Cu–ledningene og motstanden $R = 20\ \Omega$. Motstanden til Cu–ledningene blir

$$R_C = \frac{l}{\sigma A} = \cdot \frac{1.20\text{m}}{5.8 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\text{m}^2} = 0.01\ \Omega$$

Samme strømstyrke I går gjennom hele systemet. Den er

$$I = \frac{V}{R + R_C} = \frac{1.5\ \text{V}}{20.01\ \Omega} = 0.07496\ \text{A} \simeq 0.075\ \text{A}$$

ifølge Ohms lov. Vi får dermed spenningsfallene

$$V_R = RI = 20\ \Omega \cdot 0.075\ \text{A} \simeq 1.5\ \text{V}$$

over motstanden R og

$$V_C = R_C I = 0.01\ \Omega \cdot 0.075\ \text{A} = 0.00075\ \text{V}$$

over de to Cu–ledningene tilsammen. Konklusjon: Neglisjerbart spenningsfall i de to Cu–ledningene.

b) Strømstyrken I beregnet vi under punkt *a*). Utviklet effekt i motstanden R blir

$$P = V_R I = 1.5\ \text{V} \cdot 0.075\ \text{A} = 0.1125\ \text{W} \simeq 0.11\ \text{W}$$

c) Her må vi bestemme tettheten av frie elektroner n. Deretter kan vi bruke $I = j \cdot A = nevA$ til å beregne midlere driftshastighet v. I Cu har vi 8960 kg pr m^3. Dette tilsvarer 8960/0.06354 mol = 141014 mol = 141014 $\cdot 6.02 \cdot 10^{23}$ atomer = $8.49 \cdot 10^{28}$ atomer, og da like mange frie elektroner, med antagelsen ett fritt elektron pr atom Cu. Midlere driftshastighet blir

$$v = \frac{I}{neA} = \frac{0.075}{8.49 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 2.76 \cdot 10^{-6}\ \text{m/s} = 2.76\mu\text{m/s}$$

Midlere termiske hastighet for elektronene anslår vi ved å sette kinetisk energi lik termisk energi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{3}{2}k_B T \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \simeq 10^5\ \text{m/s} \end{aligned}$$

Her er $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmanns konstant. Vi ser at midlere driftshastighet er ca 11 størrelsesordener mindre enn midlere termiske hastighet. Det tar altså mange timer for et gitt elektron å komme seg fra den ene til den andre siden av ”systemet” vårt!

Oppgave 2

a) Først er det en fordel å innse at vi her har [en parallellkobling av R_1, R_2 og R_3] i serie med [en parallellkobling av R_4 og $R_0 = 0$] i serie med [R_5]. Motstanden R_4 er med andre ord “kortsluttet”, slik at det ikke vil gå noen strøm gjennom R_4. (Sagt på en annen måte: Vi har samme potensial på hver side av R_4, men da kan det heller ikke gå noen strøm gjennom denne motstanden.) Total motstand blir dermed

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} + R_5$$

b) Det er vel klart at den totale strømmen I må bli den samme som strømmen I_5 gjennom R_5. Dessuten er det klart at I må fordele seg på de 3 strømmene gjennom R_1, R_2 og R_3: $I = I_1 + I_2 + I_3$. Vi har i punkt *a*) allerede konkludert med at det ikke vil gå noen strøm gjennom R_4: $I_4 = 0$.
Spenningsfallet over de tre øverste motstandene er det samme:

$$V' = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3$$

Spenningsfallet over R_5 blir

$$V'' = R_5 I_5 = R_5 I = R_5 \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Disse to må tilsammen utgjøre den påtrykte spenningen:

$$\mathcal{E} = V' + V''$$

Dermed er

$$V' = \mathcal{E} - V'' = \mathcal{E} - R_5 \frac{\mathcal{E}}{R} = \mathcal{E}\left(1 - \frac{R_5}{R}\right)$$

Dessuten:

$$I_1 = \frac{V'}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V'}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{V'}{R_3}$$

c) Med de oppgitte tallverdiene har vi

$$R = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-1} + 5 = \frac{61}{11}\ \Omega$$

Dermed er

$$V' = 9 \cdot \left(1 - \frac{5}{61/11}\right) = \frac{54}{61}\ \text{V}$$

og

$$V'' = 9 - \frac{54}{61} = \frac{495}{61}\ \mathrm{V}$$

De ulike stømstyrkene blir

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{54}{61\cdot 1} = \frac{54}{61}\ \mathrm{A} \simeq 0.885\ \mathrm{A} \\
I_2 &= \frac{54}{61\cdot 2} = \frac{27}{61}\ \mathrm{A} \simeq 0.443\ \mathrm{A} \\
I_3 &= \frac{54}{61\cdot 3} = \frac{18}{61}\ \mathrm{A} \simeq 0.295\ \mathrm{A} \\
I_5 = I &= \frac{9\cdot 11}{61} = \frac{99}{61}\ \mathrm{A} \simeq 1.623\ \mathrm{A}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Pære 1 vil lyse sterkest i krets B og svakest i krets A. Det skyldes at i A er spenningsfallet over pære 1 bare 1/3 av spenningskildens ems, i B er spenningsfallet over alle pærene lik spenningskildens ems. I C gir parallellkoblingen av 2 og 3 en motstand $(1/R + 1/R)^{-1} = R/2$, hvis motstanden i ei pære er R. Da blir spenningsfallet over pære 1 lik 2/3 av kildens ems, og lysstyrken et sted mellom A og B.

b) I A får vi en åpen (brutt) krets, og dermed null strøm, dvs pære 1 (og 2) slukker. I B påvirker ikke pære 3 spenningen over pære 1, så lysstyrken endres ikke. I C har vi nå to motstander R i serie, så spenningsfallet over pære 1 må bli lik det halve av kildens ems, dvs mindre enn det den var med pære 3 på plass. Altså blir lysstyrken mindre i krets C.

Oppgave 4

1. Hele området mellom $r = a$ og $r = b$ kan oppfattes som en seriekobling av motstander dR, der hver motstand er et tynt kuleskall med radius r og tykkelse dr:

$$dR = \frac{\rho\, dr}{4\pi r^2}$$

Hele motstanden finner vi ved å legge sammen enkeltmotstandene, dvs ved å integrere fra $r = a$ til $r = b$:

$$\begin{aligned}
R &= \int dR \\
&= \int_a^b \frac{\rho\, dr}{4\pi r^2} \\
&= \frac{\rho}{4\pi}\Big|_a^b \left(-\frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)
\end{aligned}$$

2. Det oppgitte uttrykket for strømstyrken I viser at vi her kan bruke Gauss' lov for det elektriske feltet til å bestemme I:

$$I = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Vi må her forutsette at ladningen som kommer inn på den innerste lederen umiddelbart fordeler seg jevnt over kuleflaten ved $r = a$ før den starter sin vandring gjennom materialet mellom $r = a$ og $r = b$.
Potensialforskjellen mellom indre og ytre lederskall bestemmes enkelt ettersom vi kjenner feltet $\boldsymbol{E}$:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_a - V_b \\ &= -\int_b^a E(r)\, dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} |_b^a \frac{1}{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Av disse uttrykkene følger det at motstanden er

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$