Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2006

Løsningsforslag til øving 13

Veiledning torsdag 6. april

Oppgave 1

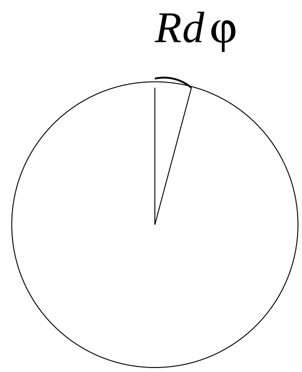
a) Argumentasjonen her tilsvarer den vi brukte da vi skulle beregne det elektriske feltet på symmetriaksen til en jevnt ladet ring. Da så vi på bidragene til feltet fra diametralt motsatte ladningselementer dq og overbeviste oss om at det totale elektriske feltet måtte peke langs symmetriaksen.
Her kan vi f.eks. se på de to lederelementene som ligger akkurat på positiv og negativ y-akse og bestemme retningen på bidraget til magnetfeltet på z-aksen fra disse. Vi tar for oss positive z først. (Se figuren på neste side. Her angir indeks + avstand fra og feltbidrag fra strømelementet som krysser positiv z-akse, mens indeks - angir tilsvarende fra strømelementet som krysser negativ z-akse.) "Strømelementet" $I\ d\boldsymbol{l}$ som krysser positiv y-akse har retning langs negativ x-akse. Kryssproduktet av denne vektoren med $\boldsymbol{r}_+$ fra strømelementet til den aktuelle posisjonen på positiv z-akse blir en vektor som ligger i yz-planet, med positiv y- og z-komponent. Det diametralt motsatte strømelementet som krysser den negative y-aksen har retning langs positiv x-akse. Kryssproduktet av denne vektoren med $\boldsymbol{r}_-$ fra strømelementet til den aktuelle posisjonen på positiv z-akse blir en vektor som også ligger i yz-planet, men denne vil ha *negativ* y-komponent og positiv z-komponent. Av symmetrigrunner må disse bidragene til $\boldsymbol{B}$ være like store i absoluttverdi, ha like store z-komponenter med samme fortegn, og ha like store y-komponenter med *motsatt* fortegn. Summen av de to bidragene peker med andre ord langs (positiv) z-akse.
Tilsvarende argumentasjon kan vi benytte for par av diametralt motsatte strømelementer rundt hele den strømførende ringen. De vil alle ha like stor z-komponent med samme fortegn og like store x- og y-komponenter med motsatt fortegn.
Konklusjon: $\boldsymbol{B}$ på positiv z-akse har retning langs z-aksen.

b) I forrige punkt overbeviste vi oss om at $\boldsymbol{B}(z)$ har retning langs positiv z-akse når $z > 0$. Hva hvis $z < 0$?
En figurbetraktning tilsvarende den vi gjorde under punkt a) viser at strømelementet som krysser den positive y-aksen gir et bidrag til $\boldsymbol{B}(z)$ på negativ z-akse som ligger i yz-planet med positiv z-komponent og negativ y-komponent. For strømelementet som krysser den negative y-aksen finner vi et bidrag med positiv z-komponent og positiv y-komponent. Alt i alt et magnetfelt med retning langs positiv z-akse.
Konklusjon: Magnetfeltet peker langs positiv z-akse på hele z-aksen.

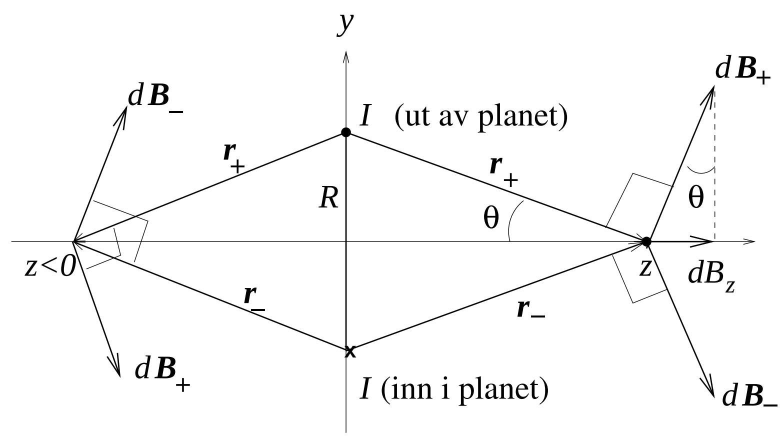
c) Vektorene $I\ d\boldsymbol{l}$ og $\hat{r}$ står vinkelrett på hverandre. Dermed er

$$|I\ d\boldsymbol{l} \times \hat{r}| = IR\ d\phi \cdot 1$$

ettersom et kurveelement dl langs en sirkel er lik radien R multiplisert med vinkelelementet $d\phi$:



Retningen på $d\boldsymbol{B}$ må bli som vist i figuren:



Fra figuren ser vi at

$$\frac{dB_z}{dB} = \sin\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

og det er jo nettopp z-komponenten av magnetfeltet vi her er ute etter. Absoluttverdien til $d\boldsymbol{B}$ blir

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR\,d\phi}{z^2 + R^2}$$

slik at

$$dB_z = dB \sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR\,d\phi}{z^2 + R^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 IR^2\,d\phi}{4\pi\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Den totale z-komponenten, og dermed det totale magnetfeltet, får vi deretter ved å integrere opp bidragene fra alle strømelementene i hele ringen, dvs ved å integrere dette uttrykket over vinkelen ϕ fra 0 til 2π:

$$B(z) = \int dB_z = \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

som skulle vises.

d) I stor avstand fra strømsløyfa kan vi sette

$$z^2 + R^2 \simeq z^2$$

Dermed blir magnetfeltet tilnærmet lik

$$B(z) \simeq \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$$

Strømsløyfas magnetiske dipolmoment er

$$m = IA = I \cdot \pi R^2$$

så vi kan skrive dette magnetfeltet på formen

$$B(z) = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$$

Det er vel verdt å sammenligne dette resultatet med det elektriske feltet på aksen til en elektrisk dipol, i stor avstand z fra dipolen. Dette gjorde vi i øving 5, hvor vi fant

$$E(z) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$$

der p er dipolens elektriske dipolmoment. Altså nøyaktig samme resultat, med m istedetfor p og μ_0 istedetfor $1/\varepsilon_0$.
Vi skal finne flere analogier mellom elektrostatikken og magnetostatikken etterhvert!

Oppgave 2

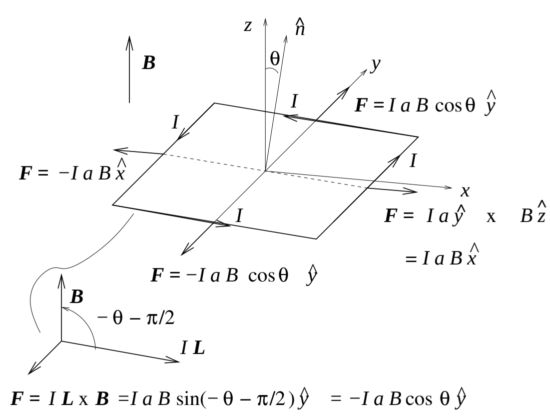
a) Sløyfas magnetiske dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = IA\,\hat{n} = Ia^2\,\hat{n}$$

Sløyfa består av 4 rette ledere med lengde a, der to og to har strømmen gående i motsatt retning. Dermed blir den magnetiske kraften

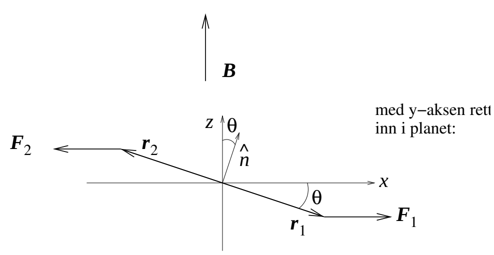
$$\boldsymbol{F} = I\int d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

motsatt rettet, men like stor i absoluttverdi, for slike par av rette lederbiter. Den totale kraften på sløyfa blir dermed null. Noen detaljer er inkludert i figuren:



Vi ser av figuren at kreftene fra magnetfeltet ville ha deformert strømsløyfa dersom det hadde vært en mulighet. For ei makroskopisk strømsløyfe er dette som regel en neglisjerbar effekt, men dersom strømsløyfa er en klassisk modell av et elektron i bane rundt en atomkjerne, aner vi at *i tillegg* til en innretting av strømsløyfa (som vi skal se på i resten av denne oppgaven), vil magnetfeltet påvirke selve banebevegelsen til elektronet rundt kjernen. Med andre ord: Atomets magnetiske moment endres både i *retning* og i *absoluttverdi*. Førstnevnte effekt er *paramagnetisme*, sistnevnte effekt er *diamagnetisme*. En klassisk modell av diamagnetisme ser vi nærmere på i oppgave 3, her konsentrerer vi oss om orienteringen av $\boldsymbol{m}$.

b) Av figuren over ser vi at de to strømmene som går parallelt med xz-planet påvirkes av krefter i hhv positiv og negativ y-retning. Disse kreftene vil da ikke bidra til dreiemomentet omkring y-aksen.
Kreftene som virker på strømmene som går parallelt med y-aksen gir tilsammen et dreiemoment (se figuren nedenfor og ovenfor)



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \\
&= -r_1 F_1 \sin\theta\ \hat{y} - r_2 F_2 \sin\theta\ \hat{y} \\
&= -2 \cdot \frac{a}{2} \cdot IaB \sin\theta\ \hat{y} \\
&= -Ia^2 \cdot B \sin\theta\ \hat{y} \\
&= -m \cdot B \sin\theta\ \hat{y} \\
&= \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

Skiftet av fortegn i siste linje skyldes av vi hadde valgt positiv vinkel θ mellom z-aksen og $\hat{n}$, altså mellom $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{m}$. Kryssproduktet $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ er, pr definisjon, m ganger B ganger sinus til vinkelen mellom $\boldsymbol{m}$ og $\boldsymbol{B}$, dvs $mB\sin(-\theta) = -mB\sin\theta$.

c) I oppgave 4c i øving 6 utledet vi en *generell* sammenheng mellom dreiemoment τ og tilhørende potensiell energi U, nemlig at en rotasjon gjennom en vinkel $d\alpha$ under påvirkning av et dreiemoment τ resulterer i en endring dU i potensiell energi gitt ved

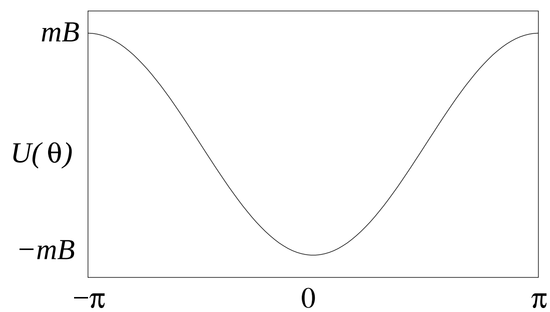
$$dU = -\tau\ d\alpha$$

Utledningen av denne sammenhengen var ikke avhengig av hvilken *type* krefter og dreiemoment det handler om, og må derfor gjelde like bra for vår magnetiske dipol i et magnetfelt som for den elektriske dipolen i et elektrisk felt i øving 6. Følgelig:

$$U(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} dU$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\alpha)\, d\alpha \\
&= mB \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\alpha\, d\alpha \\
&= mB\,(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\
&= -mB\cos\theta \\
&= -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

Her valgte jeg å sette $U(0) = -mB$, dvs $\theta_0 = \pi/2$.
Skisse:



Vi har minimal U, og følgelig stabil likevekt for $\theta = 0$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{m}$ er parallell med $\boldsymbol{B}$. Vi har maksimal U, og følgelig ustabil likevekt for $\theta = \pm\pi$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{m}$ er parallell med $-\boldsymbol{B}$.
Dette er magnetismens analogi til polarisering av dielektriske medier i et ytre elektrisk felt: Magnetiske dipoler retter seg inn langs det påtrykte magnetfeltet. Som nevnt lenger opp, dette er hva vi kaller *paramagnetisme*. Vi har snakket om ulike typer magnetisme i forelesningene – la dette være en liten oppsummering av det:
Medier som består av atomer som har et atomært magnetisk dipolmoment som *ikke* er lik null, og der dipolmomentene på atomer i nærheten av hverandre *ikke* vekselvirker med hverandre, er *paramagneter*. *Uten* et ytre magnetfelt vil de atomære magnetiske dipolmomentene peke i tilfeldige retninger, slik at den midlere *magnetiseringen*, dvs midlere magnetiske dipolmoment pr volumenhet (se punkt *d*)), blir lik null overalt i mediet. Slik var det også med midlere polarisering i et dielektrikum når vi ikke hadde noe ytre elektrisk felt. *Med* et ytre magnetfelt får vi en tendens til innretting av magnetiske dipolmoment langs det ytre feltet, og dermed en midlere magnetisering forskjellig fra null. Eksempler på paramagnetiske materialer er aluminium (Al) og magnesium (Mg).
Medier som består av atomer med atomært magnetisk dipolmoment *lik null* har ingenting å rette inn i et påtrykt magnetfelt. Men, og som nevnt lenger opp, *banebevegelsen* til elektronene rundt atomkjernen vil påvirkes av et ytre magnetfelt, slik at vi får *indusert* et atomært magnetisk dipolmoment i hvert eneste atom. Slike medier er *diamagneter*. Vi skal se kvalitativt på denne effekten i oppgave 3 nedenfor og finne at det induserte magnetiske dipolmomentet vil bli *motsatt rettet det ytre feltet*. Diamagnetisme er en mye svakere effekt enn paramagnetisme. Også i paramagneter, der vi *har* permanente atomære magnetiske dipolmoment, får vi en slik diamagnetisk "respons" i et ytre magnetfelt. Den diamagnetiske responsen vil imidlertid være tilnærmet neglisjerbar i en paramagnet. For å kunne måle diamagnetisme, trenger vi derfor

medier med null atomært magnetisk dipolmoment i utgangspunktet (dvs før vi skrur på det ytre magnetfeltet). Eksempler på diamagneter er gull (Au), sølv (Ag), kobber (Cu).
I enkelte medier har vi atomer med magnetiske dipolmoment som *vekselvirker* med dipolmomentene på naboatomene. F.eks. kan vekselvirkningen være slik at det er energetisk foretrukket at naboatomer har sine magnetiske dipolmoment i samme retning. Da har vi en *ferromagnet*, og eksempler på ferromagneter er jern (Fe), kobolt (Co) og nikkel (Ni).

d) Maksimal tetthet av magnetisk dipolmoment i jern blir lik antall jernatomer pr volumenhet ganget med magnetisk dipolmoment pr jernatom:

$$\frac{m}{V} = 2\mu_B \cdot \frac{7.9 \cdot 10^6}{55.9} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 2 \cdot 9.27 \cdot 10^{-24} \cdot \frac{7.9 \cdot 10^6}{55.9} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 1.6 \cdot 10^6$$

Enheten til m er Am^2, enheten til V er m^3. Følgelig blir enheten til magnetisk dipolmoment pr volumenhet, eller *magnetisering*, A/m.

Oppgave 3

a) Sentripetalakselerasjonen er v_0^2/R mens Coulombkraften er $e^2/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Newtons 2. lov gir da

$$m_e \frac{v_0^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v_0^2}$$

Banedreieimpulsen til elektronet er

$$\boldsymbol{L}_0 = m_e\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_0 = m_e R\, v_0\, \hat{z}$$

mens dets magnetiske dipolmoment er

$$\boldsymbol{m}_0 = I\boldsymbol{A} = -\frac{e}{2\pi R/v_0} \cdot \pi R^2\, \hat{z} = -\frac{1}{2} e v_0 R\, \hat{z} = -\frac{e}{2m_e} \boldsymbol{L}_0$$

b) Den valgte retningen på $\boldsymbol{B}$ fører til at den magnetiske kraften $\boldsymbol{F}_m = -e\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ blir rettet innover mot kjernen, dvs i samme retning som den tiltrekkende Coulombkraften. Med uendret baneradius R bestemmes dermed hastigheten v av ligningen

$$m_e \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + evB$$

Dette er en annengradsligning for v,

$$v^2 - \frac{eBR}{m_e}\, v - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} = 0,$$

med løsning

$$v = \frac{eBR}{2m_e} + \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} + \left(\frac{eBR}{2m_e}\right)^2}$$

(Løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten er negativ og ikke aktuell.)
La oss gå tilbake og se på hastigheten uten magnetfelt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R}}$$

Vi ser umiddelbart at $v > v_0$. Det betyr at det magnetiske dipolmomentet

$$\boldsymbol{m} = -\frac{1}{2} evR\, \hat{z}$$

er større enn før vi skrudde på magnetfeltet. Med andre ord, *endringen*

$$\Delta\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

er motsatt rettet det ytre magnetfeltet.
Hvis magnetfeltet istedet var rettet nedover, $\boldsymbol{B} = -B\ \hat{z}$, ville den magnetiske kraften bli rettet radielt *utover*, dvs i motsatt retning av Coulombkraften, slik at tilleggsleddet evB i bevegelsesligningen ville komme inn med motsatt fortegn. Dermed ville den nye hastigheten v ha blitt mindre enn v_0, og det magnetiske dipolmomentet også mindre enn før vi skrudde på magnetfeltet. Igjen: *Endringen* i magnetisk dipolmoment ville fremdeles ha vært motsatt rettet det ytre feltet.
Konklusjon: Et ytre magnetfelt påvirker elektronets banebevegelse i atomet på en slik måte at det *induserte* magnetiske dipolmomentet, dvs det magnetiske dipolmomentet knyttet til endringen i banebevegelsen, blir motsatt rettet det påtrykte feltet. Altså *diamagnetisme*.