Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2006

Løsningsforslag til øving 2

Veiledning 19. januar

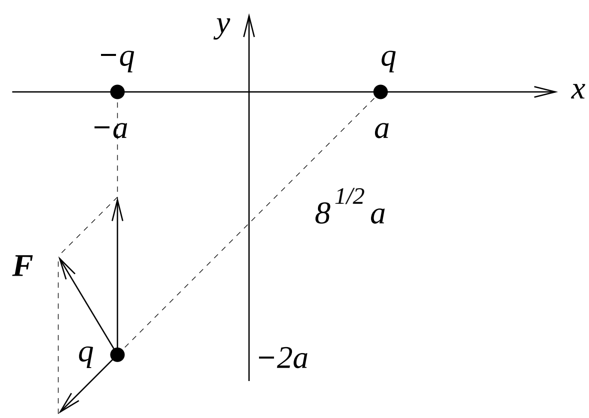
Oppgave 1

a) **C**
Elektroner har *negativ* ladning. Et *overskudd* på N elektroner innebærer derfor en netto *negativ* ladning:

$$Q = -Ne = -5 \cdot 10^{13} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} = -8 \cdot 10^{-6}\ \text{C} = -8\ \mu\text{C}$$

Her står μ for mikro, dvs 1 μC = 10^{-6} C.

b) **A**
Her er det egentlig nok å betrakte retningene på delkreftene som bidrar:

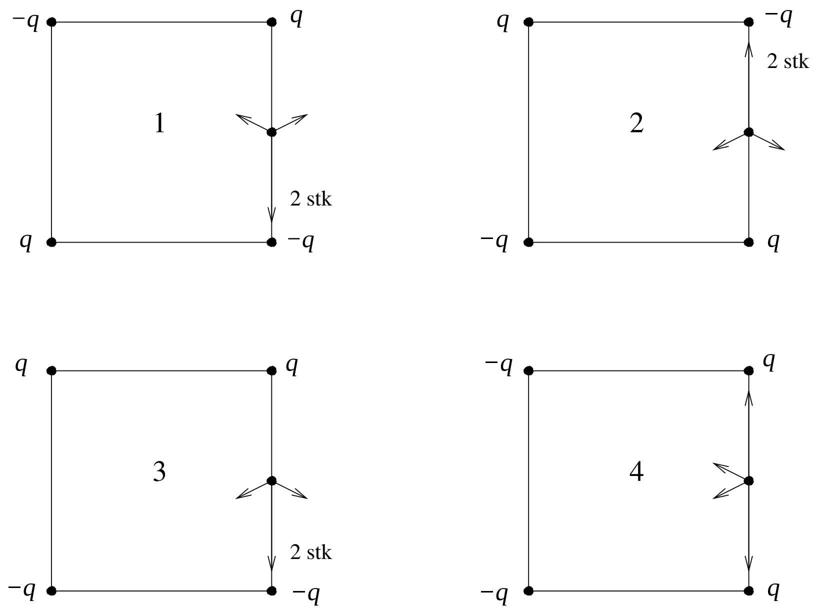


Med Pytagoras har vi at avstanden mellom de to positive ladningene er $\sqrt{8}a$. Ettersom coulombkraften er proporsjonal med $1/r^2$, må da kraften mellom de to positive bli halvparten så stor som kraften mellom den negative og den positive. Vektorsummen blir som vist i figuren, altså en total kraft $\boldsymbol{F}$ med *negativ* x-komponent og *positiv* y-komponent.
Både x- og y-komponenten av kraften fra den positive ladningen bestemmes ved å gange kraftens størrelse med en faktor $1/\sqrt{2}$, dvs hhv $\cos \pi/4$ og $\sin \pi/4$. Kraften mellom $-q$ og q er lik $F_0/4$ (i absoluttverdi), dvs at kraften mellom q og q er lik $F_0/8$. Total kraft, på vektorform, er dermed

$$\boldsymbol{F} = \frac{F_0}{4}\hat{y} - \frac{F_0}{8\sqrt{2}}\hat{y} - \frac{F_0}{8\sqrt{2}}\hat{x}$$

c) **C**

Totalt elektrisk felt i P er vektorsummen av bidragene fra de fire punktladningene. Konfigurasjonen i figur 3 gir den største feltstyrken. (Ingen feltbidrag har her komponent oppover.)



Oppgave 2

Vi kan med god tilnærmelse regne oksygenmolekylene som punktformede legemer ettersom avstanden mellom dem (300 Å) er mye større enn hvert enkelt molekyls utstrekning (av størrelsesorden 1 - 2 Å). Massen til et oksygenmolekyl er $m(O_2)$ = (32 g/mol) / ($6.02{\cdot}10^{23}$ molekyler/mol) = $5.32\ {\cdot}10^{-23}$ g/molekyl = $5.32\ {\cdot}10^{-26}$ kg. Gravitasjonskraften mellom de to oksygenmolekylene blir da

$$F_g = G\frac{m(\mathrm{O}_2)^2}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(5.32 \cdot 10^{-26})^2\ \mathrm{kg}^2}{(300 \cdot 10^{-10})^2\ \mathrm{m}^2} = 2.09 \cdot 10^{-46}\ \mathrm{N}$$

Gravitasjonskrefter er alltid *tiltrekkende*.

Med ett ekstra elektron har hvert ion O_2^- en ladning $q = -e$. Den elektriske kraften F_e mellom de to ionene blir dermed

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(300 \cdot 10^{-10})^2} = 2.56 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{N}$$

Med ladningene i enheten C og avstanden i enheten m, samt SI-verdien $9 \cdot 10^9$ for faktoren $1/4\pi\varepsilon_0$ er vi sikret at kraften kommer ut i enheten N.

Den elektriske kraften mellom to ladninger med *samme fortegn* er *frastøtende*.

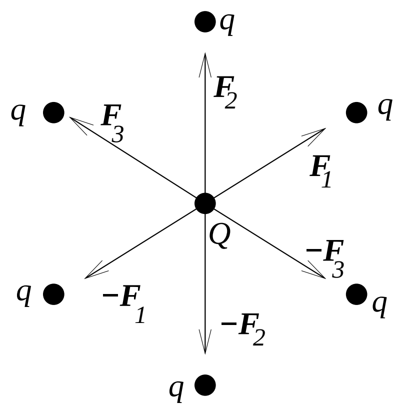
Forholdet mellom de to kreftene er

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{2.56 \cdot 10^{-13}}{2.09 \cdot 10^{-46}} \sim 10^{33}$$

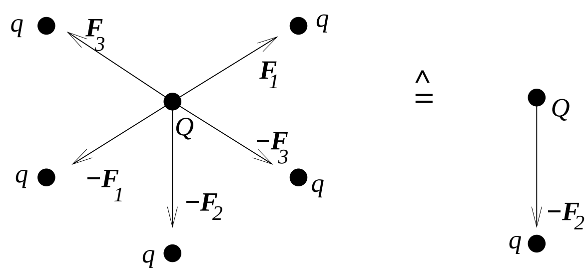
Dette betyr at gravitasjonskreftene mellom ("ikke altfor store") ladete legemer som regel kan neglisjeres i forhold til den elektriske kraften. Dette forholdet er ikke avhengig av avstanden mellom de to ionene ettersom både F_e og F_g avhenger av innbyrdes avstand som $1/r^2$.

Oppgave 3

a) På grunn av symmetrien i problemet er det vel innlysende at testladningen Q blir utsatt for null nettokraft, idet kreftene fra to og to ladninger kansellerer hverandre:



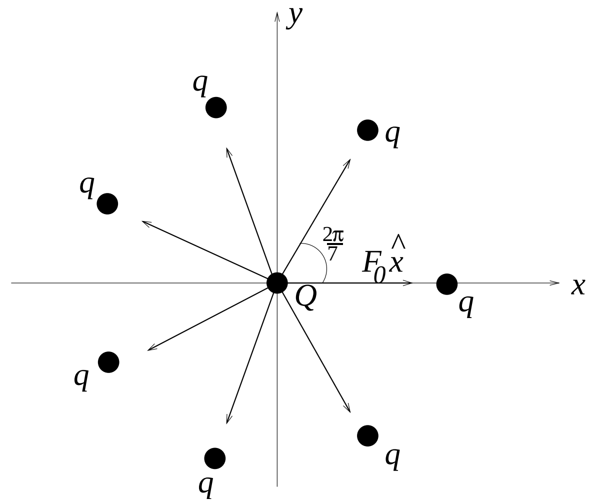
b) Vi fjerner en av ladningene, f.eks. den "øverste":



Det er da umiddelbart klart at nettokraften på Q blir lik kraften fra den ladningen vi fjernet, med motsatt fortegn, altså -$\boldsymbol{F}_2$.
Vi har her brukt *superposisjonsprinsippet*. Matematisk kunne vi f.eks. formulere løsningen slik: La $\sum_{(6)} \boldsymbol{F}_i$ angi nettokraften med alle 6 ladningene til stede og $\sum_{(5)} \boldsymbol{F}_i$ nettokraften etter vi har fjernet ladningen som påvirket Q med kraften $\boldsymbol{F}_2$. Da er

$$\sum_{(5)} \boldsymbol{F}_i = \sum_{(6)} \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{F}_2 = 0 - \boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_2$$

c) Også med et odde antall q-ladninger, f.eks. 7, må nettokraften på testladningen Q i sentrum bli lik null. Anta at nettokraften *ikke* var null. En dreining av systemet på $360/7\,^\circ$ i papirplanet ville da medføre at nettokraften endret retning. Men systemet er uendret som følge av en slik dreining, så kraften på Q kan heller ikke ha endret seg og må følgelig være null.
Hvis noen mot formodning ikke er overbevist, er det jo bare å regne ut nettokraften. Legg Q i origo og (f.eks.) den ene q på x-aksen:

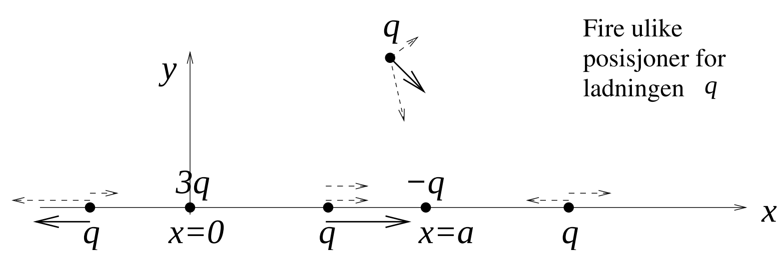


Nettokraften på Q blir da:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= F_x\hat{x} + F_y\hat{y} \\
&= F_0\,(1 + 2\cos 2\pi/7 + 2\cos 4\pi/7 + 2\cos 6\pi/7)\,\hat{x} + \\
&\quad F_0\,(0 + \sin 2\pi/7 + \sin(-2\pi/7) + \sin 4\pi/7 + \sin(-4\pi/7) + \sin 6\pi/7 + \sin(-6\pi/7))\,\hat{y} \\
&= F_0\,(1 + 1.247 - 0.445 - 1.802)\,\hat{x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Her har vi satt absoluttverdien av kraften mellom q og Q lik F_0 og benyttet at $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$.

Oppgave 4



a) Punktladningen q er i likevekt dersom kraften på den er lik null. Her virker det to krefter, en frastøtende fra $3q$ og en tiltrekkende fra $-q$, og disse to kan bare kansellere hverandre dersom de har eksakt motsatt retning. Det er ikke mulig dersom q er plassert utenfor x-aksen, f.eks. som i figuren over. (Her er de to enkeltkomponentene av kraften angitt med stiplede piler og totalkraften med heltrukken pil.) Derfor må eventuelle likevektsposisjoner være på x-aksen.

b) Vi har fått oppgitt at det er *en* likevektsposisjon x_0 for q på x-aksen. Vi kan ikke ha x_0 mellom 0 og a, for på dette intervallet peker de to kraftkomponentene i samme retning. Vi kan heller ikke ha x_0 til venstre for $x = 0$, for da er avstanden mellom q og $3q$ alltid mindre enn avstanden mellom q og $-q$, og følgelig den frastøtende kraften $3q^2/4\pi\varepsilon_0 x_0^2$ alltid større enn den tiltrekkende kraften $q^2/4\pi\varepsilon_0(a - x_0)^2$. Altså må $x_0 > a$. Vi bestemmer x_0 ved å sette total kraft lik null:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_0^2}\hat{x} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(x_0-a)^2}\hat{x} \\
&\Rightarrow \frac{3}{x_0^2} = \frac{1}{(x_0-a)^2} \\
&\Rightarrow 3x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 = x_0^2 \\
&\Rightarrow 2x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 = 0 \\
&\Rightarrow x_0 = \frac{6a}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{36a^2 - 24a^2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}a \simeq 2.37a
\end{aligned}
$$

Da forutsetningen var $x_0 > a$, er løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten ikke en aktuell løsning. (Den tilsvarer $x \simeq 0.63a$, hvor begge kraftkomponenter er like store og har *samme* retning.)
Stabiliteten av likevektsposisjonen x_0 bestemmes kanskje enklest ved å se på nettokraften når $x \gg x_0$. Da "ser" punktladningen q tilnærmet en punktladning $3q - q = 2q$ og må følgelig erfare en netto frastøtende kraft. Vi vet at kraften er null bare i $x = x_0$. Da må kraften peke mot høyre for alle $x > x_0$, også for en liten forflytning til høyre for x_0, mens den må peke mot venstre for en liten forflytning til venstre for x_0. Dermed er likevekten ustabil mhp en forflytning langs x-aksen.
Alternativt, med litt regning: La oss først forenkle notasjonen ved å innføre funksjonen $f(x)$:

$$
\boldsymbol{F}(x) = F(x)\hat{x} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right)\hat{x} \equiv \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} f(x)\hat{x}
$$

Deretter bestemmer vi df/dx i $x = x_0$:

$$
\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = -\frac{6}{x_0^3} + \frac{2}{(x_0-a)^3} \simeq -\frac{6}{(2.37a)^3} + \frac{2}{(1.37a)^3} \simeq \frac{0.33}{a^3} > 0
$$

Da $f(x_0) = 0$ og $f'(x_0) > 0$, er likevekten ustabil.