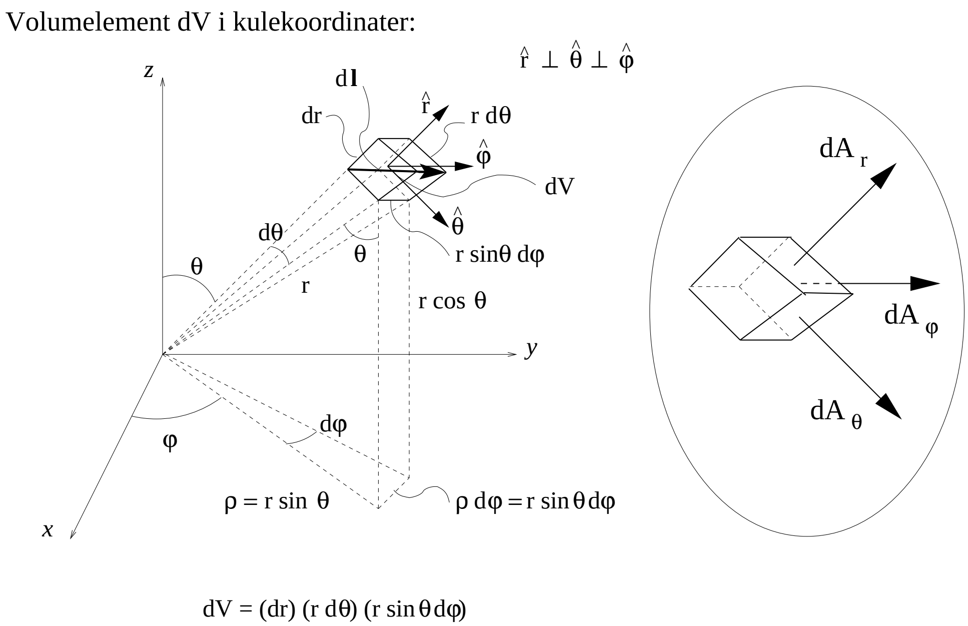
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2006

Løsningsforslag til øving 4

Veiledning torsdag 2. februar

Oppgave 1

a) Vi benytter oss av tipsene gitt i oppgaveteksten og tar utgangspunkt i figuren fra "ukentlig sammendrag uke 3":



I figuren har vi tegnet inn et veielement $d\boldsymbol{l}$, som i kulekoordinater, i sin mest generelle form, består av en forflytning langs de tre ortogonale retningene spesifisert ved de ovenfor nevnte enhetsvektorer. Vi ser at en slik forflytning, fra punktet (r, θ, ϕ) til punktet $(r+dr, \theta+d\theta, \phi+d\phi)$, nettopp tilsvarer vektoren $d\boldsymbol{l}$ diagonalt gjennom volumelementet dV. Vi ser av figuren at denne vektoren har komponenter dr langs $\hat{r}$, $r\ d\theta$ langs $\hat{\theta}$ og $r \sin\theta\ d\phi$ langs $\hat{\phi}$. Altså:

$$d\boldsymbol{l} = dr\ \hat{r} + r\ d\theta\ \hat{\theta} + r \sin\theta\ d\phi\ \hat{\phi}$$

Legg merke til at mens komponentene til vektoren $d\boldsymbol{l}$ i kartesiske koordinater alltid er de samme $(dx,\ dy,\ dz)$, avhenger to av dem av "hvor vi er" i kulekoordinater: Komponenten langs $\hat{\theta}$ er proporsjonal med r, dvs avstanden til origo, mens komponenten langs $\hat{\phi}$ i tillegg avhenger av vinkelen θ (dvs "breddegraden", hvis vi tenker oss z-aksen gjennom polene og ekvator i xy-planet). F.eks. er $dl_\phi = r \sin 0 = 0$ hvis vi starter i $\theta = 0$. Ikke urimelig: Står vi på en av polene, vil et lite skritt alltid bli i retning sørover (evt nordover), aldri østover eller vestover. Står vi på ekvator, derimot, dvs i $\theta = \pi/2$, blir $dl_\phi = r \sin \pi/2\ d\phi = r\ d\phi$. Ikke urimelig det heller: Her er øst, vest, sør og nord "likeverdige" retninger, så $dl_\theta = r\ d\theta$ og $dl_\phi = r\ d\phi$ bør her være "på samme form".

Fra figuren finner vi videre de tre flateelementene med flatenormaler henholdsvis langs $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ og $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A}_r &= (r\ d\theta)(r\sin\theta\ d\phi)\hat{r} \\ &= r^2\sin\theta\ d\theta\ d\phi\ \hat{r} \\ d\boldsymbol{A}_\theta &= (dr)(r\sin\theta\ d\phi)\hat{\theta} \\ &= r\ dr\sin\theta\ d\phi\ \hat{\theta} \\ d\boldsymbol{A}_\phi &= (dr)(r\ d\theta)\hat{\phi} \\ &= r\ dr\ d\theta\ \hat{\phi} \end{aligned}$$

Merk at disse tre er *vektorer*, med absoluttverdi lik arealet av flateelementet (f.eks. dA_r) og retning normalt på flaten (f.eks. $\hat{r}$). Vi trenger både *størrelse* og *orientering* for å gi en presis beskrivelse av en flate!

Endelig ser vi at volumelementet må bli

$$dV = (dr)(r\ d\theta)(r\sin\theta\ d\phi) = r^2\ dr\sin\theta\ d\theta\ d\phi$$

b) Volumet av ei kule med radius R finner vi ved å integrere volumelementet dV over alle verdier av θ og ϕ og r fra 0 til R:

$$\begin{aligned} V(R) &= \int_{r<R} dV = \int_0^R r^2\ dr \int_0^\pi \sin\theta\ d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{1}{3}R^3\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3}R^3 \end{aligned}$$

Merk at når vi integrerer over ϕ fra 0 til 2π, må vi integrere over θ fra 0 til π, og ikke 2π, for å dekke alle romvinkler ("retninger") *en* gang, og ikke to.

Arealet av ei kuleflate med radius R finner vi ved å integrere flateelementet dA_r (altså absoluttverdien av $d\boldsymbol{A}_r$) over alle verdier av θ og ϕ med $r = R$:

$$A(R) = \int_{r=R} dA_r = R^2\int_0^\pi \sin\theta\ d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = R^2\cdot 2\cdot 2\pi = 4\pi R^2$$

c) Den oppgitte ladningstettheten er positiv (eller null) overalt inne i kula. Den vokser lineært med avstanden fra kulas sentrum. Videre fører leddet $\cos^2\theta$ til størst ladningstetthet på de to "polene" (dvs $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$) og minst ladningstetthet (null) i ekvatorplanet (dvs $\theta = \pi/2$). Et lite volumelement dV av kula inneholder en ladning

$$dq = \rho\ dV$$

Kulas totale ladning får vi ved å integrere dq over kulas volum. Vi bruker uttrykket for dV fra punkt *a*) og får:

$$
\begin{aligned}
Q &= \int dq \\
&= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_0 \frac{r}{R}\cos^2\theta \; r^2 \; dr \sin\theta \; d\theta \; d\phi \\
&= \rho_0 \left(\int_{r=0}^{R} \frac{r^3}{R}\; dr\right)\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta \; d\theta\right)\left(\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi\right) \\
&= \rho_0 \;\; |_0^R \; \frac{r^4}{4R} \;\; |_0^\pi \; \left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right) \;\; |_0^{2\pi} \; \phi \\
&= \rho_0 \frac{R^3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\pi \\
&= \frac{\rho_0 \pi R^3}{3}
\end{aligned}
$$

Har vi regnet riktig? Vel, vi har i hvert fall riktig dimensjon: Ladning pr volumenhet ρ_0 ganget med en faktor R^3, som har dimensjon som et volum.

Med andre ord: Intet "mystisk" med slike flerdimensjonale integraler: Det er bare å integrere over hver integrasjonsvariabel for seg. Her var integranden hele tiden uavhengig av vinkelen ϕ, så integralet over den gav bare en faktor 2π. Videre var selvsagt θ-avhengigheten i ρ i den siste oppgaven valgt med omhu, slik at vi fikk et enkelt løsbart integral over variabelen θ.

Legg videre merke til at vi som regel ikke "gidder" å skrive $\int\int\int dV$, men simpelthen $\int dV$, selv om det altså er tre integrasjoner involvert. Det vil alltid gå fram av sammenhengen om det er en linje, en flate eller et volum vi skal integrere over.

Oppgave 2

Potensialforskjellen ΔV mellom to punkter er gitt ved

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

I denne oppgaven har vi et uniformt elektrisk felt $\boldsymbol{E} = E_0\;\hat{x}$, så vi kan skrive

$$\Delta V = -E_0\;\hat{x}\cdot\int_A^B d\boldsymbol{l}$$

der punktet A er origo, $(0,0)$ og B er de tre punktene gitt i oppgaveteksten. Vi får:

(i)

$$\int_A^B d\boldsymbol{l} = \int_{(0,0)}^{(a,0)} d\boldsymbol{l} = a\;\hat{x}$$

slik at

$$\Delta V = -E_0\;\hat{x}\cdot a\;\hat{x} = -E_0 a$$

(ii)

$$\int_A^B d\boldsymbol{l} = \int_{(0,0)}^{(0,a)} d\boldsymbol{l} = a\;\hat{y}$$

slik at

$$\Delta V = -E_0\, \hat{x} \cdot a\, \hat{y} = 0$$

(iii)

$$\int_A^B d\boldsymbol{l} = \int_{(0,0)}^{(a,a)} d\boldsymbol{l} = a\, \hat{x} + a\, \hat{y}$$

slik at

$$\Delta V = -E_0\, \hat{x} \cdot (a\, \hat{x} + a\, \hat{y}) = -E_0 a$$

Oppgave 3

a) Med vårt valg av polarvinkel θ ser vi fra figuren at

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \\ r &= \sqrt{x^2 + z^2} \end{aligned}$$

b) Vi bruker superposisjonsprinsippet for å bestemme potensialet fra de to punktladningene. Med punktet (x, z) i en avstand r_1 fra q og en avstand r_2 fra $-q$ får vi

$$\begin{aligned} V(x,z) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}}\right) \end{aligned}$$

Avstandene r_1 og r_2 uttrykt ved x og z ser vi direkte fra figuren.

Potensialet på x-aksen blir

$$V(x,0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2/4}}\right) = 0$$

Potensialet på z-aksen blir

$$V(0,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|}\right)$$

Legg merke til at vi her må bruke absoluttverditegn hvis vi vil ha *ett* uttrykk som gjelder på *hele* z-aksen. Med $z > a/2$:

$$\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|} = \frac{1}{z - a/2} - \frac{1}{z + a/2} = \frac{a}{z^2 - a^2/4}$$

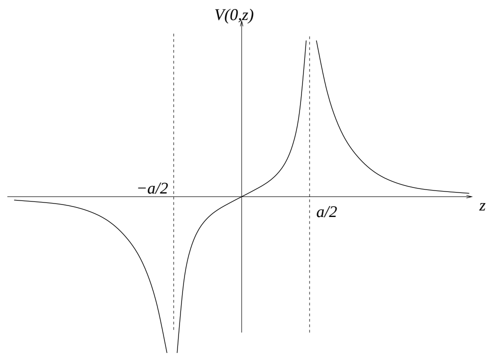
Med $z < -a/2$:

$$\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|} = -\frac{1}{z - a/2} + \frac{1}{z + a/2} = -\frac{a}{z^2 - a^2/4}$$

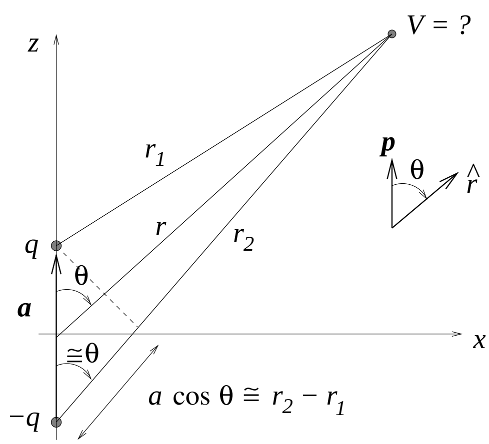
Med $-a/2 < z < a/2$:

$$\frac{1}{|z-a/2|} - \frac{1}{|z+a/2|} = -\frac{1}{z-a/2} - \frac{1}{z+a/2} = -\frac{2z}{z^2-a^2/4} = \frac{2z}{a^2/4-z^2}$$

Skisse av $V(0,z)$:



c) Vi bruker tipset gitt i oppgaveteksten, samt betraktning av følgende figur, og får:



$$\begin{aligned}
V(r,\theta) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \\
&\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{a\cos\theta}{r^2} \\
&= \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\
&= \frac{pr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\
&= \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}
\end{aligned}$$

Vi kan alternativt gå litt saktere fram: Fra figuren ser vi at

$$\begin{aligned} r_1 &\simeq r - \frac{a}{2}\cos\theta \\ r_2 &\simeq r + \frac{a}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

Når $r \gg a$ kan vi rekkeutvikle både $1/r_1$ og $1/r_2$ omkring $1/r$ og får:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} &\simeq \frac{1}{r - \frac{a}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{a}{2}\cos\theta} \\ &= \frac{1}{r}\left[\left(1 - \frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1} - \left(1 + \frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1}\right] \\ &\simeq \frac{1}{r}\left[1 + \frac{a\cos\theta}{2r} - 1 + \frac{a\cos\theta}{2r}\right] \\ &= \frac{a\cos\theta}{r^2} \end{aligned}$$

Er det så *rimelig* at potensialet fra en elektrisk dipol faller av raskere enn potensialet fra en punktladning (dvs en elektrisk "monopol")? Det er det, fordi dipolens negative og positive ladning bidrar med motsatt fortegn til det totale potensialet. Dermed vil bidragene til potensialet fra de to punktladningene delvis oppheve hverandre. (På x-aksen vil de to bidragene *eksakt* oppheve hverandre.)

Ekstranøtten (ikke så viktig, mest for "moro skyld"):
I første omgang kunne en kanskje tenke seg å fortsette rekkeutviklingen ovenfor, og ta med så mange ledd at vi får tak i dominerende korreksjon. Tar vi med ett ledd til, får vi ingenting nytt, i og med at det neste leddet vil opptre to ganger og med motsatt fortegn og dermed kansellere. Vi må ta med to ledd til:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r}\left[\left(1 - \frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1} - \left(1 + \frac{a\cos\theta}{2r}\right)^{-1}\right] \\ =\; &\frac{1}{r}\left[1 + \frac{a\cos\theta}{2r} + \left(\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^2 + \left(\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^3 + \ldots - \left(1 - \frac{a\cos\theta}{2r} + \left(\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^2 - \left(\frac{a\cos\theta}{2r}\right)^3 + \ldots\right)\right] \\ =\; &\frac{a\cos\theta}{r^2} - \frac{a^3\cos^3\theta}{4r^4} + \ldots \\ =\; &\frac{a\cos\theta}{r^2}\left(1 - \frac{a^2\cos^2\theta}{4r^2} + \ldots\right) \end{aligned}$$

Her brukte vi rekkeutviklingen $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ (som gjelder når $|x| < 1$). Ikke noe dårlig forsøk dette, men det er en liten hake ved det hele: Utgangspunktet for hele rekkeutviklingen var i seg selv en tilnærmelse, nemlig

$$\begin{aligned} r_1 &\simeq r - \frac{a}{2}\cos\theta \\ r_2 &\simeq r + \frac{a}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

Og feilen vi gjør i disse tilnærmelsene er av samme størrelsesorden som det korreksjonsleddet vi er på jakt etter!

Løsningen ligger i å gå helt tilbake til det eksakte uttrykket for V, med r_1 og r_2 uttrykt ved de kartesiske koordinatene x og z. Regningen er ikke direkte vanskelig, men såpass kronglete at jeg ikke tror jeg tar med noen flere detaljer her. Hvis jeg har regnet riktig, hvilket på ingen måte er sikkert, blir svaret

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{a\cos\theta}{r^2}\left[1 - \frac{3a^2}{8r^2}\left(1 - \frac{5}{3}\cos^2\theta\right) + \ldots\right]$$

Her har vi tatt med alle korreksjoner som er en *størrelsesorden* a^2/r^2 mindre enn det dominerende bidraget. Neste ledd i rekken vil bli ytterligere redusert, med en eller annen potens av den lille størrelsen a/r. Det første leddet som vi *ikke* tar med vil alltid være neglisjerbart i forhold til det siste leddet som vi tar med. (I vårt spesielle tilfelle, med unntak av retninger gitt ved $\cos^2\theta \simeq 3/5$, der vi ser at første korreksjonsledd faktisk forsvinner.)