NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Tirsdag 30. mai 2006 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 4 oppgaver, i alt 10 deloppgaver som alle telte like mye under bedømmelsen. Løsningsforslaget er på 6 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

a) Inne i en leder er $E = 0$ i elektrostatisk likevekt. Gauss' lov, $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = Q_{\text{in}}/\varepsilon_0$, med sylinderformet gaussflate med radius r bittelitt mindre enn a gir da null netto ladning inne i lederen. Dermed blir ladningen λ uniformt fordelt på innerlederens overflate, dvs ved $r = a = 0.285$ mm. En sylinderformet gaussflate med radius r bittelitt større enn b (dvs inne i ytterlederen) gir også $Q_{\text{in}} = 0$ ettersom $E = 0$ også på denne gaussflaten. (På gauss–sylinderens "endeflater" står E normalt på flatenormalen og gir ingen fluks gjennom disse.) Dermed må ladningen $-\lambda$ være uniformt fordelt på ytterlederens indre overflate, dvs ved $r = b = 1.85$ mm.

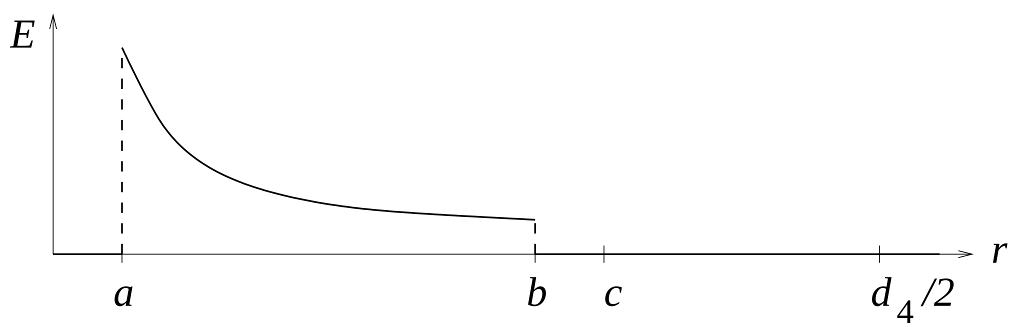
b) Her kjenner vi fordelingen av *fri* ladning på de to lederne. Med Gauss' lov for D finner vi at $D \neq 0$, og dermed $E \neq 0$, kun i PE-laget. For $a \leq r \leq b$ (gauss–sylinder med radius r og lengde L):

$$\begin{aligned} D(r) \cdot 2\pi r \cdot L &= \lambda L \\ \Rightarrow D(r) &= \frac{\lambda}{2\pi r} \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

Av symmetrigrunner (og noe vi allerede har brukt ovenfor) må det elektriske feltet stå vinkelrett på koaksialkabelens symmetriakse:

$$\boldsymbol{E}(r) = E(r)\ \hat{r}$$

Skisse av $E(r)$:



Gauss–sylindre med $r < a$ eller $r > b$ gir $Q_{\text{in}} = 0$, og dermed $E = 0$.

c) Elektriske dipoler (atomer eller molekyler) rettes inn langs det ytre elektriske feltet. Nettoeffekten blir indusert ladning på dielektrikumets overflate, positiv på den ene siden og like mye negativ på den andre siden. Det totale elektriske feltet inne i dielektrikumet blir mindre enn det påtrykte feltet.
I koaksialkabelen får vi negativ indusert ladning $\sigma_a < 0$ ved $r = a$, dvs på PE–lagets indre overflate, og positiv indusert ladning $\sigma_b > 0$ ved $r = b$, dvs på PE–lagets ytre overflate. (I PVC–laget får vi ingen polarisering siden det her ikke er noe elektrisk felt.)
Vi kan bruke den oppgitte sammenhengen mellom indusert ladning pr flateenhet og polariseringen:

$$\sigma_a = -P(a) = -\chi_e \varepsilon_0 E(a) = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 a} = -\frac{\lambda(\varepsilon_r - 1)}{2\pi a \varepsilon_r}$$

$$\sigma_b = P(b) = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 b} = \frac{\lambda(\varepsilon_r - 1)}{2\pi b \varepsilon_r}$$

Kommentar:
Dette betyr at på en lengde L av kabelen har vi en indusert ladning

$$q_a^i = \sigma_a \cdot L \cdot 2\pi a = -L\lambda \,\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$$

på indre overflate av PE–laget, og dermed en total ladning pr lengdeenhet

$$\lambda_{\text{tot}} = \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{\lambda}{\varepsilon_r}$$

Tilsvarende finner vi på PE–lagets ytre overflate en total ladning pr lengdeenhet $-\lambda/\varepsilon_r$.

d) Kapasitansen (til en lengde L) finner vi ved å bestemme potensialforskjellen mellom innerlederen og ytterlederen:

$$\Delta V = \int_a^b E(r)dr = \int_a^b \frac{\lambda dr}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a} = \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}$$

Dermed blir kapasitansen pr lengdeenhet:

$$\frac{C}{L} = \frac{Q}{\Delta V\, L} = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{\ln(b/a)}$$

Tallverdi:

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi \cdot 2.22 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}{\ln(3.70/0.57)} \simeq 66 \text{ pF/m}$$

Kommentar:
Materialer og dimensjoner i denne oppgaven tilsvarer en såkalt RG – 59 koaksialkabel fra "Draka Norsk Kabel". Den skal være velegnet til både innendørs og utendørs bruk, med anvendelser innen video og høyhastighets dataoverføring.

OPPGAVE 2

Vi setter motstanden i hver pære lik R. Strømmen gjennom pære 3 kaller vi I_3.

a)
Krets A: $R_{\text{tot}} = 3R$, $I_3 = I_{\text{tot}} = V_0/R_{\text{tot}} = V_0/3R$.
Krets B: $V_0 = RI_3$ dvs $I_3 = V_0/R$.
Krets C: $R_{\text{tot}} = R + (1/R + 1/R)^{-1} = 3R/2$, $I_3 = I_{\text{tot}}/2 = V_0/2R_{\text{tot}} = V_0/3R$.
Konklusjon: Pære 3 lyser sterkest i krets B, og like svakt i kretsene A og C.

Dersom vi skrur ut pære 2:
A: Åpen krets $\Rightarrow \quad I_3 = 0$, dvs pære 3 slokker.
B: Ingen endring (fortsatt spenning V_0 over pære 3)
C: $R_{\text{tot}} = 2R$ som gir $I_3 = I_{\text{tot}} = V_0/2R$, som er *mer* enn med pære 2 innskrudd. Altså lyser nå pære nr 3 sterkere enn med pære 2 innskrudd.

Kommentar: Jeg har her antatt at resultatet blir en åpen krets der pære nr 2 skrus ut, og ikke en kortslutning. Antagelse om kortslutning fulgt av fornuftig argumentasjon vil belønnes rundhåndet. (Kortslutning gjennom "pæreholder" 2 gir i krets A: større I_3 og sterkere lys; i krets B: $I_3 = 0$, dvs pære 3 slokker (og stor strøm totalt!); i krets C: $I_3 = 0$, dvs pære 3 slokker.)

b) Total strøm levert av spenningskilden:

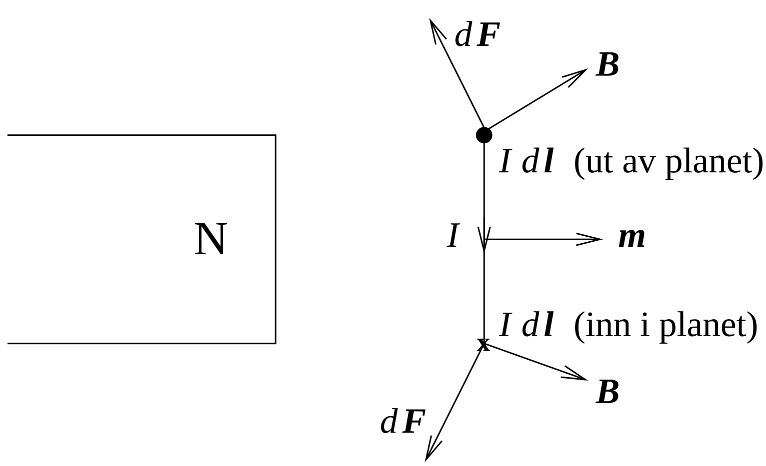
$$I_{\text{tot}} = \frac{V_0}{R_{\text{tot}}} = \frac{V_0}{3R/2} = \frac{2V_0}{3R}$$

Totalt effekttap i de tre pærene blir dermed:

$$P_{\text{tot}} = V_0\, I_{\text{tot}} = \frac{2V_0^2}{3R} = \frac{2 \cdot 81}{3 \cdot 4} = 13.5 \text{ W}$$

OPPGAVE 3

a) Kvalitativt:



Vi ser at total (netto) kraft på ringen peker mot venstre, altså tiltrekning.

b) Total kraft på ringen blir:

$$\boldsymbol{F} = \oint IR\,d\phi\,\hat{\phi} \times (B_z\hat{z} + B_r\hat{r}) = IRB_z \oint d\phi\,\hat{r} + IRB_r \oint d\phi(-\hat{z})$$

Her endrer $\hat{r}$ seg under integrasjonen. Vi ser, av symmetrigrunner, at det første leddet må bli lik null.
Derimot er $\hat{z}$ konstant under integrasjonen, så vi får

$$\oint d\phi(-\hat{z}) = -2\pi\hat{z}$$

og dermed

$$\boldsymbol{F} = -2\pi IRB_r\hat{z}$$

Rettet mot venstre, som forventet. Der ringen er, har vi selvsagt $r = R$, så med oppgitte tallverdier:

$$F = 2\pi \cdot 2000 \cdot 0.010 \cdot 0.1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \ln 2 \text{ N} = \frac{4}{9}\pi \ln 2 \text{ N} \simeq 0.97 \text{ N}$$

OPPGAVE 4

a) Magnetisk fluks gjennom ringen:

$$\phi(t) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = B \cdot \pi r^2 \cdot \cos\omega t$$

Figuren i oppgaveteksten viser at ringens flatenormal, og dermed $\boldsymbol{A}$, er parallell med $\boldsymbol{B}$ ved tidspunktet $t = 0$. Valget $\cos\omega t$ er konsistent med dette.
Indusert spenning i ringen blir dermed, i følge Faradays induksjonslov:

$$V(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \omega B\pi r^2 \sin\omega t$$

Spenningsamplituden er altså

$$V_0 = \omega B\pi r^2$$

Ohms lov gir

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{\omega B\pi r^2}{R}\sin\omega t$$

b) En leder med konduktivitet σ, lengde l og tverrsnitt S har resistans

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

(Utledes eventuelt fra sammenhengen $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ mellom strømtetthet og elektrisk felt, som gir $I = j \cdot A = \sigma EA = \sigma(V/l)A = V/R$)
Her er lengden lik ringens omkrets, $l = 2\pi r$, og tverrsnittet er $S = \pi a^2$, slik at

$$R = \frac{2\pi r}{\sigma \cdot \pi a^2} = \frac{2r}{\sigma a^2}$$

Kirchhoffs spenningsregel for kretsen med R og L i serie gir

$$V - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

dvs

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L} = \frac{V_0}{L}\sin\omega t$$

Vi ser da at

$$\omega_0 = \frac{R}{L}$$

og

$$\alpha_0 = \frac{V_0}{L} = \frac{\omega B\pi r^2}{L}$$

Kommentar:
Legg merke til at det her er snakk om både gjensidig induksjon og selvinduksjon: Det uniforme magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ er skapt av elektrisk strøm i en "annen" krets. I praksis kunne ringen for eksempel ha befunnet seg i rommet mellom nordpolen av en spole og sørpolen av en annen spole. På grunn av at ringen roterer, blir den magnetiske fluksen fra disse spolene ("krets 1") gjennom ringen ("krets 2") tidsavhengig, og det induseres en elektromotorisk spenning i ringen – altså gjensidig induksjon. Denne effekten er representert ved "spenningskilden" $V(t)$ i RL–kretsen i oppgaven.
Spenningskilden $V(t)$ fører til en tidsavhengig strøm $I(t)$ i ringen. Denne strømmen vil dermed også resultere i en tidsavhengig magnetisk fluks gjennom ringen, slik at det induseres en motspenning i ringen – altså selvinduksjon. Denne effekten er representert ved selvinduktansen L i RL–kretsen, og ved leddet $-L\,dI/dt$ i ligningen som vi fikk ved å bruke Kirchhoffs spenningsregel.
Den videre *analyse* av slike vekselstrømkretser (dvs: å løse resulterende differensialligninger og bestemme resulterende strømmer) vil være tema i senere kurs, eksempelvis FY1013 Elektrisitet og magnetisme II og TFY4185 Måleteknikk.