

Maxwells ligninger: Fra integralform til differensialform ved hjelp av
divergensteoremet og Stokes' teorem

Maxwells ligninger på integralform:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= q \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \\ \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &= 0 \\ \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}\end{aligned}$$

Divergensteoremet:

$$\oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{G} dV$$

Her er S en lukket flate som omslutter volumet V , mens \mathbf{G} representerer et vilkårlig vektorfelt. Divergens til en vektor \mathbf{G} :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{G} &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (G_x \hat{x} + G_y \hat{y} + G_z \hat{z}) \\ &= \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\end{aligned}$$

i kartesiske koordinater. I kule- eller sylinderkoordinater ser divergensoperatoren litt mer "komplisert" ut.

Merk: Divergensen til en vektor er en *skalar*, i motsetning til *gradienten* til en skalar, som er en *vektor*.

Anvender vi divergensteoremet på det elektriske feltet, kan vi skrive:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV$$

Netto ladning q i volumet V kan uttrykkes ved (rom-)ladningstettheten ρ :

$$q = \int_V \rho dV$$

Dermed må vi, ifølge Gauss' lov for \mathbf{E} , kunne skrive

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

Ettersom dette skal være riktig for vilkårlige lukkede flater S (med tilhørende volum V), må ikke bare disse *integralene* være like store – *integrandene* må også *overalt* være like store:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dette er Gauss' lov for det elektriske feltet på differensialform.

Anvender vi divergensteoremet på magnetfeltet, kan vi skrive:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV$$

Dermed må vi, ifølge Gauss' lov for \mathbf{B} , kunne skrive

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0$$

Ettersom dette skal være riktig for vilkårlige lukkede flater S (med tilhørende volum V), må ikke bare dette *integralet* være lik null – *integranden* må også *overalt* være lik null:

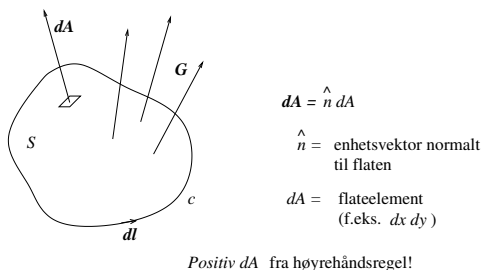
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Dette er Gauss' lov for magnetfeltet på differensialform.

Stokes' teorem:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_c \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l}$$

som uttrykt med ord sier at *veiiintegralet* av en vektor \mathbf{G} rundt en lukket kurve c er lik flateintegralet av *curl* til vektoren \mathbf{G} over en flate S som "omsluttes" av kurven c . Følgende figur illustrerer de ulike størrelsene som er involvert:



Curl til en vektor \mathbf{G} :

$$\nabla \times \mathbf{G} = \hat{x} \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right)$$

Anvender vi Stokes' teorem på \mathbf{E} , kan vi skrive:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A}$$

Ifølge Faradays lov har vi da

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

La oss holde flaten S fast, slik at det bare er \mathbf{B} som kan variere med tiden på høyre side. Da kan vi ta tidsderivasjonen inn i integralet og bruke partiell derivert:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

Ettersom dette skal være riktig for en vilkårlig (her: åpen, ikke lukket!) flate S , må ikke bare disse *integralene* være like store – *integrandene* må også *overalt* være like store:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Anvender vi Stokes' teorem på \mathbf{B} , kan vi skrive:

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A}$$

Ifølge Ampere–Maxwells lov har vi da

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \int_S \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

Her er \mathbf{j} strømtettheten (dvs strøm pr flateenhet) på flaten S , slik at total strøm gjennom S er

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$

La oss igjen holde flaten S fast, slik at det bare er \mathbf{E} som kan variere med tiden på høyre side i ligningen over. Da kan vi ta tidsderivasjonen inn i integralet og bruke partiell derivert:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \int_S \left(\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}$$

Ettersom dette skal være riktig for en vilkårlig (her: åpen, ikke lukket!) flate S , må ikke bare disse *integralene* være like store – *integrandene* må også *overalt* være like store:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Oppsummert: Maxwells ligninger på differensialform:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$