Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2006

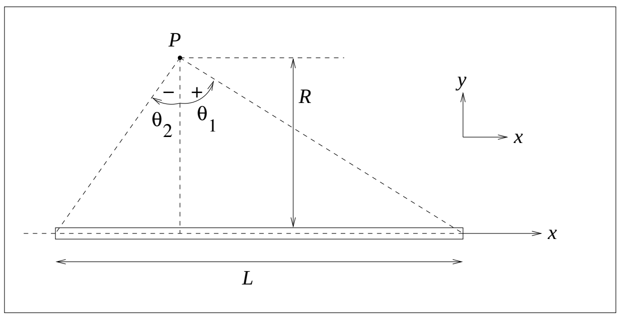
Øving 3

Veiledning: Torsdag 26. januar
Innleveringsfrist: Mandag 30. januar

Oppgave 1

En tynn stav med lengde L har uniform ladning λ pr lengdeenhet.

a) Hvor mye ladning dq er det på en liten lengde dx av staven? Hva er stavens totale ladning Q?



b) Vi legger staven på x-aksen, slik at punktet P har koordinater $(x, y) = (0, R)$. Vis at det elektriske feltet i P, dvs i avstand R fra staven, er gitt ved $\boldsymbol{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$, med

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \qquad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

Her er θ_1 og θ_2 vinklene som dannes mellom linjene fra P til stavens endepunkter og normalen til staven gjennom P (dvs y-aksen), som vist i figuren. (Fortegnet til vinklene er som indikert i figuren, dvs θ er negativ når $x < 0$).

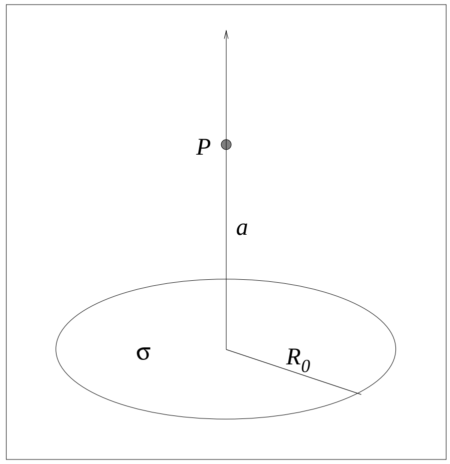
[Tips: Feltet $d\boldsymbol{E}$ fra en liten bit dx av staven (i posisjon x) er $d\boldsymbol{E} = (\lambda\, dx/4\pi\varepsilon_0 r^2)\hat{r}$, der $\boldsymbol{r}$ er avstandsvektoren fra biten dx til punktet P. Prøv deretter å ende opp med θ som integrasjonsvariabel ved å finne en sammenheng mellom x og θ.]

c) Bestem feltet når P er like langt fra stavens to ender. Hva blir $\boldsymbol{E}$ når P er langt unna staven (dvs $R \gg L$). NB: Her er vi ikke ute etter (det i og for seg korrekte) svaret $\boldsymbol{E} \simeq 0$ for $R \to \infty$, men derimot hvordan $\boldsymbol{E}$ avhenger av R “til ledende orden” for $R \gg L$. Er svaret som forventet?

d) Hva blir det elektriske feltet i avstand R fra en uendelig lang uniformt ladet stav? (Dvs: $L \to \infty$)

Oppgave 2

Ei tynn, sirkelforma skive med radius R_0 har uniform ladning σ pr flateenhet.



a) Hvor mye ladning dq er det på en tynn ring av skiva, med radius R og bredde dR? Hva er skivas totale ladning Q?

b) Finn den elektriske feltstyrken $\boldsymbol{E}$ i et punkt P på symmetriaksen i en avstand a fra skiva. (Tips: Finn først feltet $d\boldsymbol{E}$ i P fra en tynn ring med radius R og bredde dR, og integrer deretter fra $R = 0$ til $R = R_0$.)

c) Hva blir $\boldsymbol{E}$ (igjen: til ledende orden, jfr Oppg 1c) i de to tilfellene $a \gg R_0$ og $a \ll R_0$, dvs henholdsvis langt unna og nært inntil skiva? (Du drar kanskje kjensel på svaret i tilfellet $a \gg R_0$? Tenk dessuten litt på hva det andre tilfellet, $R_0 \gg a$, innebærer.)

Oppgitt: $(1+\alpha)^{\pm 1/2} \simeq 1 \pm \alpha/2$ dersom $\alpha \ll 1$.
(Dette er ikke noe mystisk, men rett og slett de to første leddene i Taylorutviklingen av funksjonene $f(\alpha) = (1+\alpha)^{\pm 1/2}$ om punktet $\alpha = 0$.)

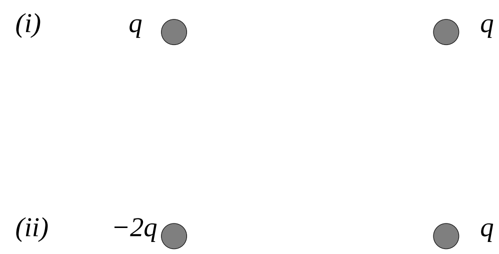
Fasitsvar:

Oppgave 2b: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R_0^2}}\right)$

Oppgave 3

a) For staven og skiva i oppgave 1 og 2, prøv å skissere elektriske feltlinjer, både i et plan som inneholder staven (skiva) og i et plan normalt på staven gjennom dens midtpunkt (normalt på skiva gjennom dens sentrum). Vis skissene i stor og liten målestokk i hvert av de fire tilfellene, slik at de gir et kvalitativt bilde av feltet, både nært og langt unna staven (skiva).

b) Skisser elektriske feltlinjer for disse to systemene av punktladninger:



Tips: I denne oppgaven vil det kanskje være til hjelp å gå inn på http://www.falstad.com/vector3de, som er en Java applet for å visualisere (blant annet) elektriske feltlinjer (”Display: Field Lines”) fra diverse ladningsfordelinger (punktladninger og kontinuerlige fordelinger). ”finite line” representerer nettopp den ladete staven. Det nærmeste vi kommer den sirkulære skiva er ”charged plate”, som har endelig utstrekning i x-retning. Stavlengden og platestørrelsen kan varieres med det nederste rullefeltet.