Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2006

Øving 4

Veiledning: Torsdag 2. februar
Innleveringsfrist: Mandag 6. februar

Oppgave 1

I kartesiske koordinater er et infinitesimalt (differensielt) linjeelement (veielement) gitt ved (vektoren)

$$d\boldsymbol{l} = dx\ \hat{x} + dy\ \hat{y} + dz\ \hat{z}$$

Et infinitesimalt volumelement er (den skalare størrelsen)

$$dV = dx\ dy\ dz$$

Et infinitesimalt flateelement kan vi uttrykke som en *vektor*: På samme måte som et linjeelement må spesifiseres ved hjelp av en *absoluttverdi* (dvs lengden av elementet) og en *retning*, må et flateelement spesifiseres ved hjelp av en absoluttverdi (dvs arealet av flaten) og en *orientering*. Og skal vi få til å spesifisere flateelementets orientering, er det vel egentlig ganske naturlig å velge den retningen i rommet som står normalt på flaten; den såkalte *flatenormalen*. Det betyr at et flateelement med areal dA, som er orientert i rommet på en slik måte at enhetsvektoren $\hat{n}$ (dimensjonsløs og med lengde 1) står vinkelrett på flaten, kan spesifiseres med vektoren

$$dA\ \hat{n}$$

Med andre ord: En vektor med retning vinkelrett på flaten, med absoluttverdi lik flatens areal dA, og med dimensjon lik lengde kvadrert. (Dvs, enhet m^2.)
For lettvinthets skyld bruker vi gjerne notasjonen

$$d\boldsymbol{A} = dA\ \hat{n}$$

for et slik flateelement.
I kartesiske koordinater har vi dermed følgende tre infinitesimale flater, med orientering slik at flatenormalen peker henholdsvis langs x-, y- og z-aksen:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A}_x &= dy\ dz\ \hat{x} \\ d\boldsymbol{A}_y &= dx\ dz\ \hat{y} \\ d\boldsymbol{A}_z &= dx\ dy\ \hat{z} \end{aligned}$$

a) Vis at i kulekoordinater (r, θ, ϕ) er de tilsvarende størrelser

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{l} &= dr\ \hat{r} + r\ d\theta\ \hat{\theta} + r \sin\theta\ d\phi\ \hat{\phi} \\ d\boldsymbol{A}_r &= r^2 \sin\theta\ d\theta\ d\phi\ \hat{r} \\ d\boldsymbol{A}_\theta &= r\ dr \sin\theta\ d\phi\ \hat{\theta} \\ d\boldsymbol{A}_\phi &= r\ dr\ d\theta\ \hat{\phi} \\ dV &= r^2\ dr \sin\theta\ d\theta\ d\phi \end{aligned}$$

Med andre ord: Flateelementet $d\boldsymbol{A}_r$ er orientert slik at flatenormalen peker radielt utover, dvs langs $\hat{r}$, og tilsvarende for de to andre.

I denne oppgaven betyr "vis at" egentlig "overbevis deg selv om at du har forstått at".

Tips: Det vil være til stor hjelp å tegne opp et infinitesimalt volumelement som avgrenses av flatene r og $r + dr$, θ og $\theta + d\theta$, ϕ og $\phi + d\phi$. Se figur i ukentlig sammendrag, uke 3. Legg merke til at enhetsvektorene $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ og $\hat{\phi}$ *ikke* er faste vektorer i rommet (i motsetning til de kartesiske enhetsvektorene $\hat{x}$, $\hat{y}$ og $\hat{z}$), de er avhengige av *hvor* i rommet vi er, og *endrer retning* ettersom vi flytter oss rundt omkring. Eksempler: I et punkt på y-aksen (med $y > 0$) er $\hat{r} = \hat{y}$ mens i et punkt på z-aksen ($z > 0$), derimot, er $\hat{r} = \hat{z}$. I hele xy-planet er $\hat{\theta} = -\hat{z}$, mens $\hat{\phi} = -\hat{x}$ på positiv y-akse og $\hat{\phi} = \hat{x}$ på negativ y-akse.

b) Vis, på grunnlag av formlene over, at ei kule med radius R har volum $4\pi R^3/3$ og overflateareal $4\pi R^2$.

Kommentar: Omkretsen av en sirkel med radius R er $2\pi R$. Sirkelen *utspenner en vinkel* på 2π (radianer). Disse resultatene kommer vi fram til ved å starte med et infinitesimalt bueelement $dl = R\ d\theta$ og integrere fra 0 til 2π. Tilsvarende har en kuleflate med radius R et areal $4\pi R^2$. Kuleflaten *utspenner en romvinkel* på 4π (såkalte steradianer). Legg merke til analogien mellom vinkel i planet og romvinkel i rommet! I sistnevnte tilfelle er utgangspunktet et infinitesimalt *flateelement* $dA_R = R^2\ d\Omega$, der $d\Omega = \sin\theta\ d\theta\ d\phi$ er et infinitesimalt *romvinkelelement*. Integrasjon over θ (fra retning "nord", dvs langs positiv z, dvs $\theta = 0$, til retning "sør", dvs langs negativ z, dvs $\theta = \pi$) og ϕ (fra retning langs positiv x, dvs $\phi = 0$, og en hel runde rundt, dvs til $\phi = 2\pi$) gir deretter hele kuleflatens totale areal A, evt. den totale romvinkelen $\Omega = 4\pi$. Vi kommer mere tilbake til dette i forelesningene, i forbindelse med *Gauss lov*.

c) Anta nå at vi har ei kule med radius R. Inni kula har vi elektrisk ladning gitt ved ladningstettheten (dvs ladning pr volumenhet)

$$\rho(r, \theta) = \rho_0 \frac{r}{R} \cos^2\theta$$

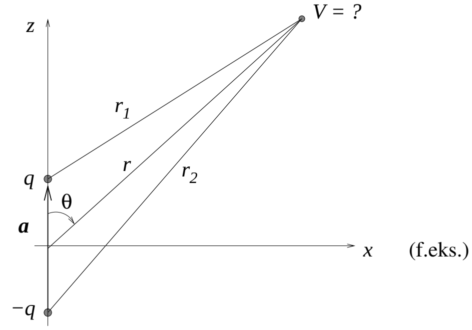
Hvor har vi størst ladningstetthet? Enn minst? Bestem kulas totale ladning Q.

Oppgave 2

Vi har et uniformt elektrisk felt $\boldsymbol{E} = E_0\ \hat{x}$. Bestem potensialforskjellen mellom origo og følgende punkter (x, y) i xy-planet:
(i) $(a, 0)$ *(ii)* $(0, a)$ *(iii)* (a, a)

Oppgave 3

En *elektrisk dipol* er plassert langs z-aksen med sentrum i origo, som vist i figuren. Det elektriske *dipolmomentet* er da $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}$, der $\boldsymbol{a} = a\,\hat{z}$ er vektoren fra $-q$ til q.



Siden vi her opplagt må ha *symmetri* med hensyn til rotasjon omkring z-aksen, er det tilstrekkelig å se på forholdene i et halvplan som inneholder z-aksen, f.eks. xz-planet, med $x > 0$.
Vi kan videre velge mellom kartesiske koordinater (x, z) eller polarkoordinater (r, θ) for å angi en vilkårlig posisjon i dette planet. Vi skal se på begge deler i denne oppgaven. Vinkelen θ kan vi selvsagt velge i forhold til hvilken kartesiske akse vi vil; her lar vi θ være vinkelen som $\boldsymbol{r}$ danner i forhold til z-aksen (se figuren).

a) Bestem først sammenhengen mellom de kartesiske koordinatene og polarkoordinatene, dvs $x(r, \theta)$, $z(r, \theta)$ og $r(x, z)$.

b) Vis at potensialet fra en slik dipol i kartesiske koordinater blir

$$V(x, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}}\right)$$

Hva blir potensialet på x-aksen, $V(x, 0)$? Enn på z-aksen, $V(0, z)$? (På *hele* z-aksen; pass på fortegnene...!) Skisser funksjonen $V(0, z)$.

c) Vis at i stor avstand fra dipolen (dvs $r \gg a$) er potensialet med god tilnærmelse gitt i polarkoordinater ved

$$V(r, \theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Tips: Ta utgangspunkt i at

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

og bruk figuren til å finne et tilnærmet uttrykk for dette når $r \gg a$.
Mens potensialet fra en enkelt punktladning avtar som $1/r$, avtar altså potensialet fra en dipol *raskere*, nemlig som $1/r^2$. Er dette rimelig?

Kommentar: For den som insisterer på en mer rigid matematisk tilnærming til denslags, er det her snakk om å bestemme $V(r, \theta)$ "til ledende orden" i den "lille parameteren" a/r. Med andre ord, det oppgitte uttrykket for $V(r, \theta)$ er *eksakt* for en såkalt *ideell dipol* med "null utstrekning" (dvs $a \to 0$). Ekstranøtt, hvis du syntes dette ble for lett: Hva blir "dominerende korreksjon" til den oppgitte $V(r, \theta)$? Dvs: Hva blir neste ledd i rekkeutviklingen (Maclaurinrekken) til $V(r, \theta)$ for små verdier av a/r, dvs $a/r \ll 1$?