Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2006

Litt om rekkeutviklinger og tilnærmede uttrykk for funksjoner

Den såkalte Taylorrekken for en funksjon $f(x)$ i nærheten av et punkt $x = a$ er

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Altså et polynom i $(x-a)$, der summen fortsetter i det uendelige. Her betyr $f'(a)$ den deriverte av funksjonen f med hensyn på x, evaluert i $x = a$, $f^{(n)}(a)$ betyr den n-te deriverte, og $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. En forutsetning er selvsagt at alle de deriverte eksisterer i $x = a$. Dessuten må leddene i summen etterhvert bli mindre og mindre, på en slik måte at vi får en bedre og bedre tilnærming til den eksakte verdien $f(x)$ jo flere ledd vi tar med i summen. Vi ser at vi kan skrive Taylorrekken slik:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Spesialtilfellet $a = 0$ kalles gjerne Maclaurinrekken til f:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Grunnen til at flere og flere ledd i nettopp en slik sum gir en stadig bedre tilnærming til $f(x)$ er som følger:

- Ett ledd i summen gir $p_0(x) = f(0)$. Vi har et polynom $p_0(x)$ med riktig verdi i $x = 0$, men heller ikke mer.
- To ledd gir $p_1(x) = f(0) + f'(0)x$. Vi har et polynom p_1 med riktig verdi i $x = 0$ og i tillegg riktig helning i $x = 0$: $p_1'(0) = f'(0)$.
- Tre ledd gir $p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$. Vi har et polynom $p_2(x)$ med riktig verdi $f(0)$, riktig helning $f'(0)$ og riktig krumning i $x = 0$: $p_2''(0) = f''(0)$.
- $n + 1$ ledd gir polynomet $p_n(x)$. Nå er $p_n(0) = f(0)$, $p_n'(0) = f'(0)$, ... , $p_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$. Altså et polynom med alle de første n deriverte med riktig verdi i $x = 0$.

La oss se på et eksempel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Vi ser umiddelbart at $f(0) = 1$ og at funksjonen avtar mot null for økende verdier av x. Men *hvordan* avhenger funksjonen av x, for eksempel i nærheten av $x = 0$? Dette kan vi besvare ved å se på rekkeutviklingen av $f(x)$ (Maclaurinrekken, dvs omkring punktet $x = 0$). Det eneste vi må kunne er å derivere:

$$\begin{aligned} f'(0) &= [(1+x)^{-1/2}]'_{x=0} = [-\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}]_{x=0} = -\frac{1}{2} \\ f''(0) &= [(1+x)^{-1/2}]''_{x=0} = [(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1+x)^{-5/2}]_{x=0} = \frac{3}{4} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Dermed kan vi altså tilnærme $f(x)$ med polynomet

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \ldots = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots$$

Hvor mange ledd skal vi ta med i summen? Vel, det avhenger av hva vi er ute etter. La oss si at vi ønsket en tilnærmet verdi av $f(0.1)$ som ikke skilte seg fra den eksakte verdien med mer enn 0.001. Siden leddene i rekkeutviklingen hele tiden skifter fortegn, innser vi vel at dette oppnås ved å ta med så mange ledd at det *neste* leddet i rekken (dvs det første leddet som vi ikke tar med) er mindre enn 0.001 (i absoluttverdi). Med $x = 0.1$ blir jo leddene mindre og mindre i absoluttverdi, så med økende antall ledd i rekkeutviklingen "pendler" vi fram og tilbake omkring den eksakte verdien av $f(0.1)$, med stadig mindre feil. I vårt tilfelle har 2.ordensleddet verdien $3 \cdot 0.1^2/8 = 3/800 = 3.75/1000 = 0.00375$ når $x = 0.1$. Vi regner ut det neste leddet for å sjekke at det er mindre enn 0.001:

$$|\frac{1}{3!}f'''(0)x^3|_{x=0.1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{8} \cdot 0.1^3 = \frac{15}{48000} = 0.0003125 < 0.001$$

Følgelig er det tilstrekkelig å ta med tre ledd for å bestemme $f(0.1)$ med den ønskede nøyaktighet:

$$f(0.1) \simeq 1 - 0.05 + 0.00375 = 0.95375 \simeq 0.954$$

På min kalkulator får jeg det riktige svaret med 9 desimalers nøyaktighet:

$$f(0.1) = 0.953462589$$

Dette ble jo nærmest numerisk analyse, og det er forsåvidt ikke så dumt å kunne litt om det. Vi er imidlertid som regel kun ute etter svar på spørsmålet "hvordan avhenger f av x *til ledende orden* i ulike grensetilfeller", for eksempel "små" x ($x \ll 1$). Det innebærer som regel å finne det første leddet i en slik rekkeutvikling. Med andre ord, det leddet som "overlever" (lengst) når vi tar grensen $x \to 0$.

Går vi tilbake til eksempelet over, vil "laveste ordens tilnærmelse" (her: nullte orden i x) av funksjonen $1/\sqrt{1+x}$ være lik 1 dersom $x \ll 1$. Vi må gå til nest laveste ordens tilnærmelse for å finne ut hvordan $f(x)$ avhenger av x i nærheten av $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq 1 - \frac{x}{2} \quad \text{for} \quad x \ll 1$$

Hva med den andre grensen, "store" verdier av x, dvs $x \gg 1$? Vel, lar vi x gå mot uendelig, går selvsagt $1/\sqrt{1+x}$ mot 0. Greit nok. Men *hvordan* går f mot null når x vokser? I første omgang trenger vi ingen rekkeutvikling for å svare på det: Dersom $x \gg 1$, kan vi neglisjere 1 i forhold til x, dvs vi kan sette $1 + x \simeq x$, slik at

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{for} \;\; x \gg 1$$

Legg merke til at "ledende oppførsel" av $f(x)$ i dette tilfellet ikke kunne uttrykkes ved x opphøyd i noen heltallig potens, men derimot som x opphøyd i $-1/2$.
Nå kunne det jo tenkes at vi var interessert i *korreksjoner* til en slik ledende oppførsel for store verdier av x. Kan vi finne en rekkeutvikling av funksjonen $f(x)$ der leddene blir mindre og mindre når $x \gg 1$? Svaret er ja. Vi må imidlertid ha en "liten" parameter, og dette kan åpenbart ikke være x. Men $1/x$ blir jo liten dersom x blir stor! La oss derfor skrive om $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/x}}$$

Her kan vi rekkeutvikle den siste brøken, og for å få med "ledende korreksjon" til resultatet $f(x) = 1/\sqrt{x}$ må vi ta med to ledd:

$$\frac{1}{\sqrt{1+1/x}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{for} \;\; x \gg 1$$

Dermed har vi

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^{3/2}} \quad \text{for} \;\; x \gg 1$$

I oppgave 2b i Øving 3 beregnet vi det elektriske feltet på symmetriaksen til en uniformt ladet skive:

$$E(a) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}} \right)$$

I oppgave 2c var spørsmålet hvordan $E(a)$ oppførte seg "til ledende orden" for $a \gg R_0$.
Vi ser vel med en gang at vi ikke bare kan neglisjere R_0^2 i forhold til a^2, for det gir $E = 0$. For å finne ledende oppførsel av $E(a)$, må vi rekkeutvikle brøken med kvadratroten. Vi skriver

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_0^2}{a^2}}}$$

Med andre ord, vår lille, dimensjonsløse parameter er R_0^2/a^2. Vi må ta med to ledd i rekkeutviklingen:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_0^2}{a^2}}} \simeq 1 - \frac{R_0^2}{2a^2}$$

Dermed blir det elektriske feltet langt unna skiva:

$$E(a) \simeq \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - 1 + \frac{R_0^2}{2a^2} \right) = \frac{\sigma R_0^2}{4\varepsilon_0 a^2}$$

Og det ser jo riktig bra ut, ettersom skivas totale ladning er $Q = \sigma\pi R_0^2$ og feltet i avstand a fra en punktladning Q er $Q/4\pi\varepsilon_0 a^2$.