Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2006, uke 11

Mandag 13.03.06

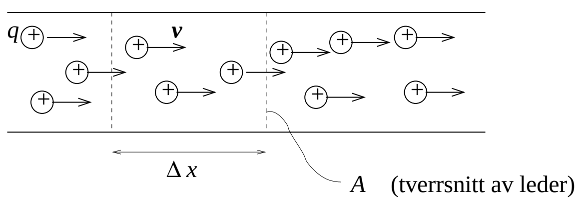
Elektrisk strøm.
[FGT 26.1; YF 25.1; TM 25.1; AF 24.1, 24.2; LHL 21.1; DJG 5.1.3]

Elektrisk strømstyrke = (positiv) ladning som passerer gjennom tverrsnitt av leder pr tidsenhet. I *metall* er *elektroner* ladningsbærerne, med ladning $-e$. Da går partikkelstrømmen og den elektriske strømmen i motsatt retning.

Med ladning ΔQ som passerer tverrsnitt A på tiden Δt:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \stackrel{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{dQ}{dt}$$

Enhet for strømstyrke: $[I] = [Q/t] = \mathrm{C/s} = \mathrm{A}$ (ampere)



Med $n = \Delta N/\Delta V$ ladningsbærere pr volumenhet, med midlere *driftshastighet* $\boldsymbol{v}$ og ladning q:

$$\Delta Q = q\Delta N = nq\Delta V = nq\Delta x A$$

$$\Rightarrow I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqA\frac{\Delta x}{\Delta t} = nqAv$$

Strømtetthet = strøm pr flateenhet:

$$j = \frac{I}{A}$$

Dermed:

$$j = nqv$$

Både strømtetthet j og driftshastighet v er vektorer:

$$\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}$$

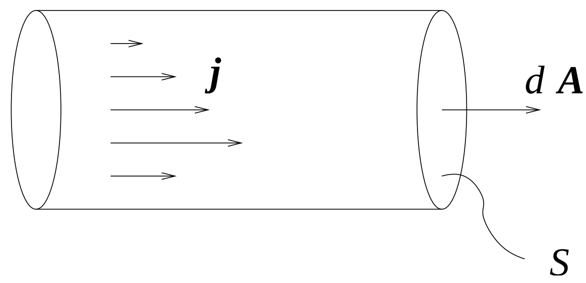
Dersom vi også betrakter tverrsnittet A som en vektor, blir I en *skalar* størrelse:

$$I = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A}$$

Strømmen I har da kun retning i forhold til lederen (positiv eller negativ).

Generalisering, dersom $\boldsymbol{j}$ ikke er konstant over lederens tverrsnitt:

$$I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A}$$



Ohms "lov"
[FGT 26.3; YF 25.2,25.3; TM 25.2; AF 24.3, LHL 21.2, DJG 7.1.1]

Må ha *drivende kraft* $\boldsymbol{F}$ for å få strøm gjennom lederen. Dersom

$$I \sim \boldsymbol{F} \sim \boldsymbol{E} \sim V$$

(dvs: dersom I er proporsjonal med den drivende kraften, og dermed også proporsjonal med det elektriske feltet og dermed også proporsjonal med potensialforskjellen V, så...) har vi såkalt *lineær respons*:

$$I = \frac{1}{R} V$$
$$\Rightarrow V = RI$$

som er Ohms lov.

Enhet for *motstand (resistans)*: $[R] = [V/I] = \mathrm{V/A} = \Omega$ (ohm)

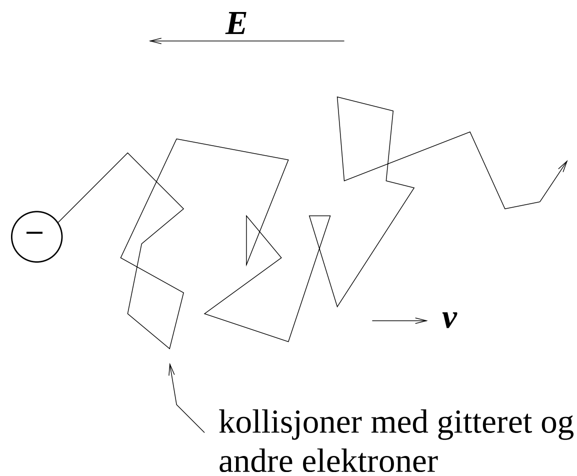
Ohmske materialer: Følger Ohms lov for store variasjoner i I
Ikke-ohmske materialer: Betydelige avvik fra lineær sammenheng mellom I og V

Kretssymbol for motstand:

Fredag 17.03.06

Elektrisk ledningsevne (konduktivitet)
[FGT 26.2,26.3; YF 25.2,25.3; TM 25.2; AF 24.4, LHL 21.2, DJG 7.1.1]

(Dette sammendraget er basert på fjorårets forelesning om temaet. Et sammendrag av P. K. Drudes modell finner du helt til slutt i dette dokumentet. Se også LHL 21.4.)
Tilfeldig bevegelse (diffusjon) av ladningsbærere gjennom leder, *pluss* netto drift pga feltet $\boldsymbol{E}$



Midlere driftshastighet langs $-\boldsymbol{E}$: $\quad \boldsymbol{v}$
Partikkelhastighet knyttet til temperaturen i lederen: $v_T \sim \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} \gg v$

Kommentar: En korrekt kvantemekanisk beskrivelse av elektronene i et metall vil faktisk resultere i en enda større partikkelhastighet. Det skyldes at elektronene er en type elementærpartikler som kalles *fermioner* og adlyder det såkalte *Pauliprinsippet*, som sier at man ikke kan ha mer enn ett fermion i hver tillatte "tilstand". Dette tvinger elektronene inn i tilstander med høyere energi enn de ville ha hatt hvis de var klassiske partikler. Mer om det i senere kurs i kvantemekanikk og faste stoffers fysikk!

For ohmsk materiale: $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{E}$

Dette gir da lineær sammenheng mellom strømtetthet og elektrisk felt:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

som definerer materialets *konduktivitet* σ. Dette er også Ohms lov.

Leder med lengde l, (konstant) tverrsnitt A og konduktivitet σ har resistans

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}$$

Bevis:

$$I = jA = \sigma EA = \sigma \frac{V}{l} A = \frac{1}{R} V \quad \Rightarrow \quad R = \frac{l}{\sigma A}$$

Her har vi antatt at E er konstant i lederen (som er OK, se Griffiths, Example 7.3), og dermed lik spenningsfallet over lederen V dividert med lengden l. Det siste likhetstegnet i ligningen over er rett og slett Ohms lov, dvs definisjonen av R.

Kan nå innføre *konduktans*:

$$G = \frac{1}{R}$$

og *resistivitet*:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

σ og ρ er materialspesifikke størrelser
R og G avhenger i tillegg av lederens størrelse og utforming

Enheter:
$[G] = \Omega^{-1}$
$[\sigma] = [l/RA] = \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$
$[\rho] = \Omega\ \mathrm{m}$

Temperaturavhengigheten til ρ
[FGT 26.3; YF 25.2; TM 25.2; LHL 21.2]

Økt temperatur T resulterer i sterkere gittervibrasjoner og dermed hyppigere kollisjoner mellom elektronene og gitteret. Dette gir redusert driftshastighet v og redusert konduktivitet σ, dvs økt resistivitet ρ.
Empirisk gjelder over "et visst temperaturintervall" for metaller:

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Her er T_0 en valgt referansetemperatur, f.eks. 300 K, $\rho_0 = \rho(T_0)$ målt resistivitet ved T_0, og α målt temperaturkoeffisient, dvs helning på $\rho(T)/\rho_0$ plottet som funksjon av T.

Elektrisk effekt
[FGT 26.7; YF 25.5; TM 25.3; AF 24.5, LHL 22.2, DJG 7.1]

Endring i potensiell energi, ΔU, for ladning ΔQ som går gjennom et spenningsfall V:

$$\Delta U = \Delta Q \cdot V$$

Energibevarelse:
Uten kollisjoner: Får akselerasjon av ladningsbærerne og økt kinetisk energi.
Med kollisjoner (noe vi faktisk har!), dvs motstand R: ΔU "tapes" som *varme* i motstanden.

Effekttap = energitap pr tidsenhet:

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = V\frac{\Delta Q}{\Delta t} = V \cdot I$$

Hvis vi har ohmsk materiale ($V = RI$):

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

Enhet for effekt:

$$[P] = [\frac{U}{t}] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W} \ \ (\text{watt})$$

Kobling av flere motstander
[FGT 26.4; YF 26.1; TM 25.4; AF 24.6, LHL 21.3]

Seriekobling av N motstander R_i, $i = 1, .., N$:

$$R = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

Parallellkobling av N motstander R_i, $i = 1, .., N$:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

Fra øving 9, **kobling av flere kapasitanser**
[FGT 25.4; YF 24.2; TM 24.4; AF Ex. 25.8, LHL 20.2]:

Seriekobling av N kapasitanser C_i, $i = 1, .., N$:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

Parallellkobling av N kapasitanser C_i, $i = 1, .., N$:

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

I disse uttrykkene representerer R og C henholdsvis den ekvivalente motstanden og ekvivalente kapasitansen dersom vi erstatter alle de serie- eller parallellkoblede elementene med en enkelt motstand eller kapasitans.

Et par kommentarer!

- Har ikke vi blitt enige om at inne i en elektrisk leder er det elektriske feltet lik null? Jo, men bare dersom vi har *elektrostatisk likevekt*! Når det går en elektrisk strøm gjennom lederen, har vi ikke lenger elektrostatisk likevekt! Og har vi ikke elektrostatisk likevekt, behøver ikke lenger det elektriske feltet å være lik null.

- I forelesningene slo jeg simpelthen fast, fullstendig uten bevis, at dersom vi har en (rett) leder med samme tverrsnitt langs hele lederen, og som fører en *stasjonær* (dvs tidsuavhengig) elektrisk strøm I, så er det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ *uniformt* overalt inne i lederen. Jeg har ikke tenkt å bevise dette resultatet her heller. (Men se eksempel 7.3 i Griffiths, hvis du er interessert.) Imidlertid er det bryet verdt å se litt på *konsekvensene* av at det elektriske feltet er uniformt inne i en slik leder. Det betyr for eksempel at det ikke er noe netto ladning noen steder inne i lederen, på samme måte som vi har funnet tidligere inne i en leder i elektrostatisk likevekt. Uniformt elektrisk felt betyr at uansett hva slags volumelement, stort eller lite, inne i lederen vi ser på, må all elektrisk fluks inn i volumelementet også gå ut av volumelementet igjen. Men da er jo netto ladning inne i volumelementet lik null, ifølge Gauss' lov! Konklusjon: Potensialforskjellen over lederen, og det (uniforme) elektriske feltet inne i lederen, er "skapt" av ladninger som må befinne seg på lederens overflate. (Nøyaktig *hvordan* ladningsfordelingen på lederens overflate blir er som regel ikke så lett å beregne...!)

- Ulike materialer har svært ulike verdier for resistivitet. Eksempler: Sølv har $\rho = 1.59 \cdot 10^{-8}$ mens diamant har $\rho = 2.7$ (begge i enheten Ωm og ved romtemperatur). Ulike typer glass har typisk resistiviteter i området $10^{10} - 10^{14}$. Vent litt, var vi ikke enige om at glass var en isolator, dvs uten mobile ladninger, og dermed null ledningsevne, eller uendelig resistivitet? Vel, som så mye annet her i verden er dette bare "nesten sant". Det *er* sant ved null temperatur. I praksis, ved "normale" temperaturer, har vi alltids et og annet elektron som er løsrevet fra sitt "opprinnelige" atom. I tillegg har vi alltid *urenheter* i større eller mindre grad, og slike "fremmedatomer" kan også bidra med frie ladninger og derved gi en viss elektrisk ledningsevne. Men: Legg merke til de enorme forskjellene i tallverdier: Forholdet mellom resistiviteten til glass og sølv kan bli opptil 10^{22}. En motstand i en elektrisk krets er typisk laget av et materiale med betydelig større resistivitet enn metallet i tilførselsledningene. Vi kan derfor med god tilnærmelse betrakte de metalliske tilførselsledningene som ekvipotensialer, dvs med null spenningsfall over dem, og dermed også null elektrisk felt inne i dem. Ettersom vi har sammenhengen $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$, ser vi at null felt samtidig med en strømtetthet som *ikke* er null må bety $\sigma \to \infty$. Da snakker vi om at vi har en *perfekt* leder. Og i dette kurset betyr "isolator" et materiale med uendelig resistivitet, eller $\sigma = 0$. Da ser vi at $j = 0$ *alltid*, selvom $E \neq 0$.

Elektrisk ledningsevne: Klassisk forenklet mikroskopisk modell a la P. K. Drude anno 1900 (LHL 21.4)

I et metall vil frie elektroner, med ladning $-e$ og masse m_e, kollidere med ionegitteret på sin vei gjennom krystallen. (Ioner, med positiv ladning, fordi hvert atom har gitt fra seg ett (eller flere) elektron(er) til en "gass" av frie elektroner.)
Midlere avstand mellom kollisjonssentra blir av samme størrelsesorden som gitteravstanden:

$$a \sim 10^{-9} \text{ m}$$

Midlere partikkelhastighet v_T ved temperatur T er gitt ved at

$$\frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

der k_B er Boltzmanns konstant. Dermed:

$$v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9 \cdot 10^{-31}}} \simeq 10^5 \text{ m/s}$$

Dermed blir midlere tid mellom to kollisjoner:

$$\tau \simeq \frac{a}{v_T} \simeq 10^{-14} \text{ s}$$

La oss anta at en kollisjon mellom et elektron og et ion i gitteret fører til at elektronet får en fullstendig tilfeldig retning på hastigheten umiddelbart etter kollisjonen, dvs

$$\langle v_x \rangle \simeq 0$$

Vi velger her (negativ) x-akse som retning for det elektriske feltet som sørger for en foretrukken retning for transport av elektroner gjennom metallet:

$$\boldsymbol{E} = E_x \hat{x}$$

dvs med $E_x < 0$. Newtons 2. lov bestemmer nå elektronets bevegelse i tiden mellom to kollisjoner:

$$F_x = m_e \frac{dv_x}{dt} = -eE_x$$

som gir en midlere hastighet i x-retningen rett før ny kollisjon

$$\langle v_x \rangle = -\frac{e}{m_e} \tau E_x$$

Og dette må da også bli omtrent riktig uttrykk for midlere driftshastighet for de frie elektronene i metallet:

$$\boldsymbol{v}_d = -\frac{e\tau}{m_e} \boldsymbol{E}$$

Fra før har vi sammenhengen

$$\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}_d = -ne\boldsymbol{v}_d$$

mellom strømtettheten $\boldsymbol{j}$ og driftshastigheten $\boldsymbol{v}_d$. n er antall frie elektroner pr volumenhet. Men da kan vi skrive ned sammenhengen mellom $\boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

der

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$$

er *konduktiviteten* til metallet. Som vi har sett tidligere i dette sammendraget, er dette nettopp Ohms lov!

Drudes modell er overforenklet på flere måter, uten at vi skal gå nærmere inn på det i denne omgang. Men la oss til slutt sette inn noen mer eller mindre rimelige tallverdier og se hva vi får for f.eks. konduktiviteten til kobber:

$$\begin{aligned} n &\sim 10^{29} \\ \tau &\sim 10^{-14} \\ e &\sim 10^{-19} \\ m_e &\sim 10^{-30} \end{aligned}$$

Her er alle størrelser angitt med SI-enheter, og disse tallene gir

$$\sigma(\mathrm{Cu}) \sim 10^7$$

Eksperimentelt har vi, ved romtemperatur,

$$\sigma(\mathrm{Cu}) = 5.8 \cdot 10^7$$

som egentlig er overraskende nært.