

Mandag 20.02.06

**Elektrisk polarisering. Dielektrika.**

[FGT 25.5, 25.6; YF 24.4, 24.5; TM 24.5, 24.6; AF 25.6, 25.7; LHL 20.5; DJG 4.1]

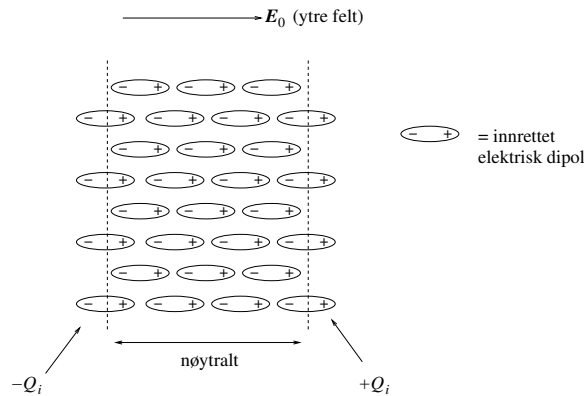
Isolator: Ingen mobile (frie) ladninger (men *bundne* ladninger)

Dielektrikum: Polariserbar isolator

Plasseres et dielektrikum i et ytre elektrisk felt  $\mathbf{E}_0$ , får vi innretning av (molekylære) elektriske dipoler langs  $\mathbf{E}_0$ , jfr øving 6, oppgave 4. (Eventuelt: Polarisering internt i atomer og upolare molekyler som i utgangspunktet har null elektrisk dipolmoment.)

Netto (makroskopisk) effekt av det ytre feltet:

Forskyvning av bundne ladninger



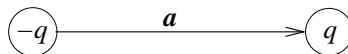
$\pm Q_i$  = induert nettoladning på isolatorens overflater

Polarisering = dipolmoment pr volumenhet:

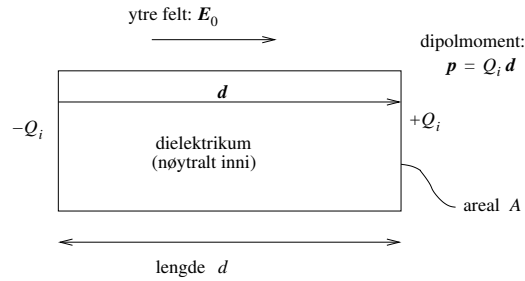
$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{V}$$

Elektrisk dipolmoment (repetisjon!):

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a}$$



Dielektrikum i ytre felt  $\mathbf{E}_0$ :



Volum:  $V = Ad$

Tetthet av induisert overflateladning:  $\sigma_i = Q_i/A$

Dermed:

Totalt dipolmoment:  $p = |\mathbf{p}| = Q_i d = \sigma_i Ad = \sigma_i V$

Polarisering:  $P = |\mathbf{P}| = p/V = \sigma_i$

Generelt:  $\mathbf{P} \cdot \hat{n} = P_{\perp} = \sigma_i$

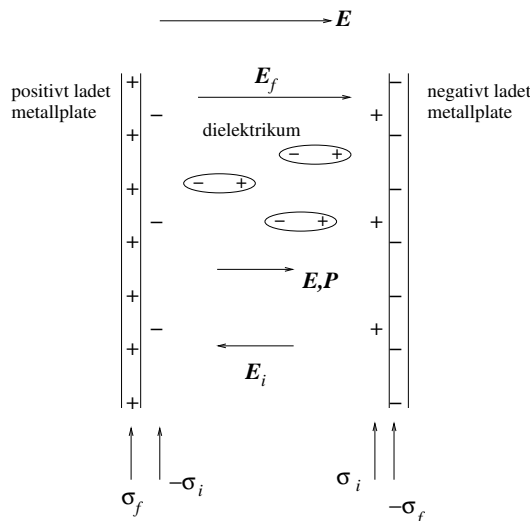
( $\hat{n}$  = flatenormal,  $P_{\perp}$  = komponenten av  $\mathbf{P}$  som står normalt på overflaten)

### Elektrisk forskyvning.

[FGT 25.6; YF 24.6; TM 24.6; AF 25.8; LHL 20.5; DJG 4.3]

Bruker idealisert system som vi har sett på før:

Motsatt ladede metallplater (uendelig store), nå med dielektrikum i mellom:



Fri ladning pr flateenhet på metallplatene:  $\sigma_f$

... som genererer elektrisk felt mellom platene:  $E_f = \sigma_f/\epsilon_0$  (null felt utenfor platene)

Indusert ladning pr flateenhet på overflaten av dielektrikum:  $\sigma_i$

... som genererer elektrisk felt mellom platene:  $E_i = \sigma_i/\epsilon_0$

Totalt felt mellom platene:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_f + \mathbf{E}_i \Rightarrow E = |\mathbf{E}| = E_f - E_i = (\sigma_f - \sigma_i)/\epsilon_0$

Netto ladning på overflatene:  $\pm\sigma = \pm(\sigma_f - \sigma_i)$

... som genererer totalt felt mellom platene:  $E = \sigma/\varepsilon_0 = (\sigma_f - \sigma_i)/\varepsilon_0$ , OK!

Vi har:  $\sigma_i = P$  = polariseringen i dielektrikumet (= dipolmoment pr volumenhet)

Dermed:

$$\sigma_f = \sigma + \sigma_i = \varepsilon_0 E + P$$

Vi ser altså at tettheten av *fri* ladning  $\sigma_f$  er bestemt av kombinasjonen  $\varepsilon_0 E + P$ . I endel tilfeller, f.eks. i endel eksperimenter, er det nettopp den frie ladningen vi har kontroll over. Med dielektrikum til stede er det derfor ofte *hensiktsmessig* å "referere til" vektorfeltet

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$\mathbf{D}$  kalles *elektrisk forskyvning*.

Her:

$$D = |\mathbf{D}| = \sigma_f$$

Generelt (som vi også fant for  $\mathbf{P}$ ):

$$\sigma_f = \mathbf{D} \cdot \hat{n} = D_{\perp}$$

der  $D_{\perp}$  er normalkomponenten av den elektriske forskyvningen.

Fredag 24.02.06

Gauss' lov for  $\mathbf{D}$ :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_f$$

der  $Q_f$  er netto *fri* ladning innenfor den lukkede flaten  $S$ . (Netto total ladning innenfor  $S$  er  $Q_{\text{in}} = Q_f - Q_i$ , med  $-Q_i =$  netto *bundet* ladning, knyttet til polariseringen  $\mathbf{P}$ , innenfor  $S$ .)

### Elektrisk susceptibilitet og permittivitet.

[FGT 25.5; YF 24.4; TM 24.5, 24.6; AF 25.9; LHL 20.5; DJG 4.4]

Lineær respons:  $\mathbf{P}$  proporsjonal med  $\mathbf{E}$ , dvs vi kan skrive

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

der vi har innført  $\chi_e =$  elektrisk susceptibilitet.

NB: En slik lineær sammenheng mellom  $\mathbf{P}$  og  $\mathbf{E}$  gjelder *ikke alltid*, men i dette kurset skal vi hele tiden anta at det gjelder. Merk også at  $\mathbf{E}$  er det *totale* elektriske feltet, *ikke bare* det ytre feltet.

Dermed:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ &= (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ &= \varepsilon \mathbf{E} \end{aligned}$$

Her har vi innført størrelsene

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e =$  relativ permittivitet (“dielektrisitetskonstanten”)

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 =$  mediets permittivitet

Enheter:

$[\chi_e] = [\varepsilon_r] = 1$  (dimensjonsløs)

$[\varepsilon] = [\varepsilon_0] = \text{C}^2/\text{Nm}^2$

Punktladning  $q$  i dielektrikum med permittivitet  $\varepsilon$ :

Elektrisk felt:  $\mathbf{E}(r) = (q/4\pi\varepsilon r^2)\hat{r}$

Elektrisk potensial:  $V(r) = q/4\pi\varepsilon r$

Dvs: Som for punktladning i vakuum, men med  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon > \varepsilon_0$ ; mediet polariseres og *skjjermer* punktladningen slik at  $E$  og  $V$  reduseres med en faktor  $1/\varepsilon_r$ .

### Kondensator og kapasitans.

[FGT 25.1, 25.5; YF 24.1, 24.2; TM 24.4; AF 25.10; LHL 20.1; DJG 2.5.4]

Kondensator = to adskilte elektriske ledere med ladning  $\pm Q$  (Eventuelt: En elektrisk leder med ladning  $Q$ , den andre tenkt flyttet uendelig langt bort.)

Coulombs lov  $\Rightarrow$  elektrisk felt i området omkring lederne er proporsjonalt med  $Q$

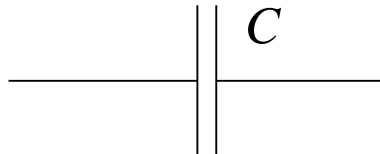
Dermed følger også at *potensialforskjellen*  $\Delta V$  mellom de to lederne er proporsjonal med  $Q$ :

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$C =$  kondensatorens *kapasitans*

Enhet for kapasitans:  $[C] = [Q/\Delta V] = \text{C}/\text{V} \equiv \text{F}$  (farad)

Symbol i elektriske kretser:



$C$  er en *geometrisk faktor*, avhengig av ledernes utforming og innbyrdes avstand, og dessuten det mellomliggende mediet.

Kapasitans er, pr definisjon, en *positiv* størrelse.

Utregning av  $C$  for et gitt system vil gå ut på å bestemme potensialforskjellen mellom de to lederne,  $\Delta V = V_+ - V_-$ , for en gitt ladning  $\pm Q$ .

Parallellplatekondensator, luftfylt (vakuum), med plateareal  $A$ , plateavstand  $d$ :

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Parallellplatekondensator, fylt med dielektrikum med relativ permittivitet  $\varepsilon_r$ , plateareal  $A$ , plateavstand  $d$ :

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

Dersom området mellom kondensatorens to ledere, som i utgangspunktet er fylt med luft ( $\simeq$  vakuum), helt eller delvis fylles med et dielektrikum, vil kondensatorens kapasitans alltid bli større enn den var med bare luft. (Det samme gjelder også hvis området med luft/vakuum erstattes med metall.)

### **Energi assosiert med elektrisk felt**

[FGT 25.3; YF 24.3; TM 24.3; AF 25.11; LHL 20.4; DJG 2.4.3]

Potensiell energitetthet, dvs potensiell energi pr volumenhet, er med elektrisk felt  $E$  lik

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Vi hadde også at potensiell energi kunne "assosieres" med den elektriske ladningen: Dersom et "system" har elektrisk potensial (f.eks. relativt til potensialet uendelig langt borte, som vi som regel kan sette lik null)  $v(q)$  når det har ladning  $q$ , må vi utføre et arbeid  $dW = v(q) dq$  for å øke ladningen fra  $q$  til  $q + dq$ . Følgelig blir totalt arbeid, og dermed også total "lagret" potensiell energi i systemet, lik

$$W = U = \int_0^Q v(q) dq$$

for å lade opp systemet fra null ladning til endelig ladning  $Q$ .

Alternativt kan vi altså regne ut lagret potensiell energi ved å integrere opp energitettheten  $u$  over hele volumet  $V$ :

$$U = \int_V u dV = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV$$

(Merk at her står  $V$  for *volum* og ikke potensial. Dessuten: Ikke la deg forvirre av notasjonen brukt ovenfor: Jeg brukte  $v(q)$  for å angi potensialforskjellen mellom de to kondensatorplatene med ladning  $q$  og  $-q$ , dvs på et vilkårlig tidspunkt underveis i oppladingen. Grunnen var at jeg ønsket å reservere  $V$  for potensialforskjellen mellom platene når de var ferdig oppladet, dvs med ladning  $Q$  og  $-Q$ . Jeg forsøker å minimere "sammenblanding" av symboler, men  $V$  bruker jeg altså for potensial *og* volum.)