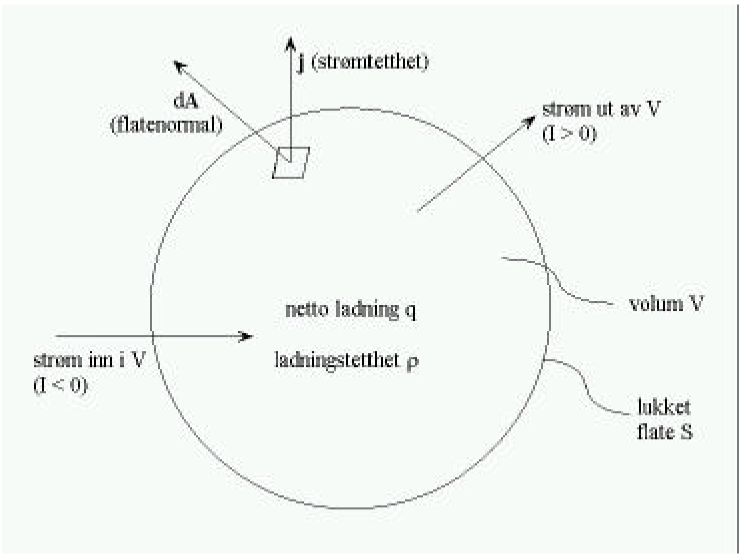
Kontinuitetsligningen og Ampere-Maxwells lov

(Alonso og Finn: 27.5 og 27.6; Griffiths: 5.1.3 og 7.3.2; Lillestøl, Hunderi og Lien: 18.5 og 23.8)

Ladningsbevarelse
Som nevnt tidlig i forelesningene, har vi en bevaringslov for elektrisk ladning:

Elektrisk ladning er bevart i alle fysiske prosesser.

(Altså som for andre fysiske størrelser som masse, energi osv.)
Matematisk formuleres en slik lov ved hjelp av en *kontinuitetsligning*.



Vi ser på et volum V som avgrenses av en lukket flate S. Inne i volumet V har vi en eller annen fordeling av elektrisk ladning beskrevet av ladningstettheten ρ, slik at den totale (netto) ladningen i volumet V er

$$q = \int_V r\, dV$$

Dersom elektrisk ladning nå ikke kan oppstå eller forsvinne av seg selv inne i volumet V, er det bare en måte den totale ladningen q kan forandre seg på: Ved at det strømmer netto elektrisk ladning inn eller ut gjennom flaten S som omslutter volumet V. Dersom strømtettheten (dvs strømmen pr flateenhet) et sted på flaten S er **j**, blir strømmen dI_S gjennom et lite element dA (med flatenormal d**A**) av overflaten lik dI_S = **j**·d**A**, slik at netto strøm gjennom flaten S må bli

$$I_S = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Her har vi, som vanlig, definert flatenormalen d**A** som positiv med retning *ut av* volumet V (se figuren), slik at en positiv I_S betyr at det alt i alt går en *positiv* netto strøm *ut av* volumet V. I_S uttrykker altså hvor mye ladning som forsvinner fra volumet V pr tidsenhet. I løpet av et lite tidsintervall dt forsvinner det dermed en ladningsmengde I_S dt fra volumet V, slik at vi kan skrive

$$dq = -I_S\, dt$$

for endringen dq i total ladning inne i volumet V. Med andre ord,

$dq/dt + I_S = 0$,

som er kontinuitetsligningen på integralform. (Hvorfor ”integralform”? Jo, fordi q og I_S er hhv total ladning i V og total strøm gjennom S, gitt ved integralene over.)
Den tilsvarende ligningen på differensialform får vi ved å benytte oss av divergensteoremet, som vi har gjort så mange ganger før:

$$I_S = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{j}\right) dV$$

Dessuten har vi:

$$\frac{d}{dt} q = \frac{d}{dt} \int_V r dV = \int_V \frac{\partial r}{\partial t} dV$$

(der vi kunne ta operatoren d/dt inn i integralet fordi vi betrakter et fast, altså ikke tidsavhengig, volum V). Settes nå disse to uttrykkene inn i kontinuitetsligningen, får vi

$$\int_V \left(\frac{\partial r}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \right) dV = 0 \, ,$$

og ettersom dette skal gjelde for et vilkårlig valgt volum V, må integranden være lik null overalt, altså:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \, ,$$

som er kontinuitetsligningen på differensialform. Og for å gjenta utgangspunktet: Denne ligningen uttrykker matematisk bevaringsloven for elektrisk ladning: Overalt, og til enhver tid, er elektrisk ladning bevart. Skulle ladningstettheten ρ komme til å endre seg et sted, skyldes dette at ”tilstrømningen” og ”frastrømningen” på dette stedet ikke er like store, hvilket kommer til uttrykk i at divergensen til strømtettheten **j** ikke er lik null.

En kontinuitetsligning har vi ikke bare for elektrisk ladning, men også for andre fysiske størrelser som er bevart: Masse, energi (skalare størrelser), impuls, dreieimpuls (vektorstørrelser). I Lillestøl, Hunderi og Lien (bind 2) utledes kontinuitetsligningen med utgangspunkt i bevaring av en vilkårlig fysisk (skalar) størrelse.

Vi skal i neste omgang se at prinsippet om bevaring av elektrisk ladning får konsekvenser for Amperes lov, som simpelthen ikke *kan* være riktig når vi har tidsavhengige ladningsfordelinger og elektriske felt.

Ampere-Maxwells lov
Med utgangspunkt i Biot-Savarts lov utledet vi Amperes lov for magnetfeltet. På integralform hadde vi

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0 I$$

Dvs: Kurveintegralet av **B** rundt en lukket kurve c er lik vakuumpermeabiliteten μ_0 multiplisert med total (netto) elektrisk strøm I som omsluttes av kurven c. Ved hjelp av Stokes' teorem omformet vi denne ligningen til Amperes lov på differensialform:

$$\nabla \times \vec{B} = m_0 \vec{j}$$

der **j** er strømtettheten. Nå er det et uomtvistelig matematisk faktum at divergensen til curl til en vektor alltid er lik null. Men da sier jo Amperes lov at

$$\nabla \cdot \vec{j} = \frac{1}{m_0} \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B} \right) = 0$$

Dette stemmer *ikke* med kravet om ladningsbevarelse, dvs kontinuitetsligningen, som sier at

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial r}{\partial t}$$

Med andre ord: Amperes lov er bare riktig dersom $\partial r / \partial t = 0$, dvs bare når vi har *magnetostatikk*, dvs stasjonære elektriske strømmer.
Så hva gjør vi dersom vi *ikke* har stasjonære strømmer? Jo, Amperes lov må modifiseres, og det var Maxwell som fant ut hvordan det skulle gjøres: Legg til et ekstra ledd på høyre side i Amperes lov:

$$\nabla \times \vec{B} = m_0 \vec{j} + m_0 e_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(Ampere-Maxwells lov)}$$

Hvorfor nettopp dette ekstraleddet? Jo:

- For det første er denne ligningen konsistent med kravet om ladningsbevaring: Anvend divergensoperatoren på begge sider av ligningen. Da blir venstre side lik null, slik at $\nabla \cdot \vec{j} = -e_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -e_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial r}{\partial t}$, der vi i den siste overgangen benyttet Gauss' lov for **E**.
- For det andre er dette ekstraleddet helt nødvendig for å kunne utlede en *bølgeligning* for det elektromagnetiske feltet med utgangspunkt i Maxwells ligninger. Med andre ord: Uten Maxwells korreksjon til Amperes lov, ingen bølgeligning for **E** og **B**, og dermed heller ingen elektromagnetisk teori for beskrivelse av lys, radiobølger osv.
- For det tredje har vi nå en tiltalende "symmetri" når vi sammenligner Faraday-Henrys lov og Ampere-Maxwells lov: Et tidsvarierende magnetfelt induserer et elektrisk felt, og et tidsvarierende elektrisk felt induserer et magnetfelt.

Legg merke til at i Ampere-Maxwells lov opptrer faktoren $e_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ "på lik linje" med strømtettheten $\vec{j}$. Videre kan det vises (se f.eks. Griffiths 7.3.5) at Amperes lov for H-feltet, $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{fri}$, må modifiseres til $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{fri} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, der faktoren $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ opptrer som et tilleggsledd til "fri" strømtetthet $\vec{j}_{fri}$. Ettersom **D** kalles "elektrisk forskyvning", er det da kanskje ikke så rart at betegnelsen "forskyvningsstrøm" (evt. "forskyvningsstrømtetthet") har blitt hengende ved Maxwells korreksjonsledd til Amperes lov. Men det er altså *ikke* en *virkelig* strøm det er snakk om, men rett og slett et tidsvarierende elektrisk felt.

Det er ikke vanskelig å oppnå *integralformen* av Ampere-Maxwells lov: Med utgangspunkt i Ampere-Maxwells lov på differensialform, ta integralet over en flate S (ikke lukket flate!) avgrenset av en lukket kurve c. Det gir:

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{A} = \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{A} + m_0 e_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow$$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0 I + m_0 e_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

(Her brukte vi Stokes' teorem slik at vi kunne skrive flateintegralet av curl **B** som et kurveintegral av **B**, og ettersom vi betrakter en fast (ikke tidsvarierende) flate S, kunne vi ta derivasjonsoperatoren d/dt utenfor integralet.)
Både Griffiths (7.3.1-7.3.2) og Lillestøl/Hunderi/Lien (23.8) illustrerer hvordan to forskjellig valgte flater S_1 og S_2 som begge er avgrenset av den samme lukkede kurven c gir samme resultat for kurveintegralet av **B** under opplading av en platekondensator: I det ene tilfellet går det en strøm *I* gjennom flaten S_1 mens **E** = 0, slik at bare det *første* leddet på høyre side gir et bidrag. I det andre tilfellet går det ingen strøm gjennom flaten S_2, men til gjengjeld varierer den elektriske fluksen gjennom flaten på en slik måte at det *andre* leddet på høyre side gir et nøyaktig like stort bidrag: E-feltet mellom kondensatorplatene er $E = \sigma/\varepsilon_0 = q/\varepsilon_0 A$, der σ er ladningstettheten på platene og A er arealet. Dermed er $dE/dt = (1/\varepsilon_0 A)\, dq/dt = I/\varepsilon_0 A$, slik at det andre leddet på høyre side nettopp gir bidraget $\mu_0 I$.