

Løsningsforslag til øving 11

Veiledning uke 12

Oppgave 1

a) Dette systemet kan oppfattes som en seriekobling av tre motstander: de to 60 cm lange Cu-ledningene og motstanden $R = 20 \Omega$. Motstanden til Cu-ledningene blir

$$R_C = \frac{l}{\sigma A} = \frac{1.20 \text{ m}}{5.8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 0.01 \Omega$$

Samme strømstyrke I går gjennom hele systemet. Den er

$$I = \frac{V}{R + R_C} = \frac{1.5 \text{ V}}{20.01 \Omega} = 0.07496 \text{ A} \simeq 0.075 \text{ A}$$

ifølge Ohms lov. Vi får dermed spenningsfallene

$$V_R = RI = 20 \Omega \cdot 0.075 \text{ A} \simeq 1.5 \text{ V}$$

over motstanden R og

$$V_C = R_C I = 0.01 \Omega \cdot 0.075 \text{ A} = 0.00075 \text{ V}$$

over de to Cu-ledningene tilsammen. Konklusjon: Neglisjerbart spenningsfall i de to Cu-ledningene.

b) Strømstyrken I beregnet vi under punkt a). Utviklet effekt i motstanden R blir

$$P = V_R I = 1.5 \text{ V} \cdot 0.075 \text{ A} = 0.1125 \text{ W} \simeq 0.11 \text{ W}$$

c) Her må vi bestemme tettheten av frie elektroner n . Deretter kan vi bruke $I = j \cdot A = nevA$ til å beregne midlere driftshastighet v . I Cu har vi 8960 kg pr m^3 . Dette tilsvarer $8960/0.06354 \text{ mol} = 141014 \text{ mol} = 141014 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \text{ atomer} = 8.49 \cdot 10^{28} \text{ atomer}$, og da like mange frie elektroner, med antagelsen ett fritt elektron pr atom Cu. Midlere driftshastighet blir

$$v = \frac{I}{neA} = \frac{0.075}{8.49 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 2.76 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} = 2.76 \mu\text{m/s}$$

Midlere termiske hastighet for elektronene anslår vi ved å sette kinetisk energi lik termisk energi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{3}{2}k_B T \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \simeq 10^5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Her er $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmanns konstant. Vi ser at midlere driftshastighet er ca 11 størrelsesordener mindre enn midlere termiske hastighet. Det tar altså mange timer for et gitt elektron å komme seg fra den ene til den andre siden av ”systemet” vårt!

Oppgave 2

a) Først er det en fordel å innse at vi her har [en parallellkobling av R_1 , R_2 og R_3] i serie med [en parallellkobling av R_4 og $R_0 = 0$] i serie med [R_5]. Motstanden R_4 er med andre ord ”kortslettet”, slik at det ikke vil gå noen strøm gjennom R_4 . (Sagt på en annen måte: Vi har samme potensial på hver side av R_4 , men da kan det heller ikke gå noen strøm gjennom denne motstanden.) Total motstand blir dermed

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} + R_5$$

b) Det er vel klart at den totale strømmen I må bli den samme som strømmen I_5 gjennom R_5 . Dessuten er det klart at I må fordele seg på de 3 strømmene gjennom R_1 , R_2 og R_3 : $I = I_1 + I_2 + I_3$. Vi har i punkt a) allerede konkludert med at det ikke vil gå noen strøm gjennom R_4 : $I_4 = 0$.

Spenningsfallet over de tre øverste motstandene er det samme:

$$V' = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3$$

Spenningsfallet over R_5 blir

$$V'' = R_5 I_5 = R_5 I = R_5 \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Disse to må tilsammen utgjøre den påtrykte spenningen:

$$\mathcal{E} = V' + V''$$

Dermed er

$$V' = \mathcal{E} - V'' = \mathcal{E} - R_5 \frac{\mathcal{E}}{R} = \mathcal{E} \left(1 - \frac{R_5}{R} \right)$$

Dessuten:

$$I_1 = \frac{V'}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V'}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{V'}{R_3}$$

c) Med de oppgitte tallverdiene har vi

$$R = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)^{-1} + 5 = \frac{61}{11} \Omega$$

Dermed er

$$V' = 9 \cdot \left(1 - \frac{5}{61/11} \right) = \frac{54}{61} \text{ V}$$

og

$$V'' = 9 - \frac{54}{61} = \frac{495}{61} \text{ V}$$

De ulike stømstyrkene blir

$$I_1 = \frac{54}{61 \cdot 1} = \frac{54}{61} \text{ A} \simeq 0.885 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{54}{61 \cdot 2} = \frac{27}{61} \text{ A} \simeq 0.443 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{54}{61 \cdot 3} = \frac{18}{61} \text{ A} \simeq 0.295 \text{ A}$$

$$I_5 = I = \frac{9 \cdot 11}{61} = \frac{99}{61} \text{ A} \simeq 1.623 \text{ A}$$

Oppgave 3

a) Pære 1 vil lyse sterkest i krets B og svakest i krets A. Det skyldes at i A er spenningsfallet over pære 1 bare $1/3$ av spenningskildens ems, i B er spenningsfallet over alle pærene lik spenningskildens ems. I C gir parallellkoblingen av 2 og 3 en motstand $(1/R + 1/R)^{-1} = R/2$, hvis motstanden i ei pære er R . Da blir spenningsfallet over pære 1 lik $2/3$ av kildens ems, og lysstyrken et sted mellom A og B.

b) I A får vi en åpen (brutt) krets, og dermed null strøm, dvs pære 1 (og 2) slukker. I B påvirker ikke pære 3 spenningen over pære 1, så lysstyrken endres ikke. I C har vi nå to motstander R i serie, så spenningsfallet over pære 1 må bli lik det halve av kildens ems, dvs mindre enn det den var med pære 3 på plass. Altså blir lysstyrken mindre i krets C.

Oppgave 4

1. Hele området mellom $r = a$ og $r = b$ kan oppfattes som en seriekobling av motstander dR , der hver motstand er et tynt kuleskall med radius r og tykkelse dr :

$$dR = \frac{\rho dr}{4\pi r^2}$$

Hele motstanden finner vi ved å legge sammen enkeltmotstandene, dvs ved å integrere fra $r = a$ til $r = b$:

$$\begin{aligned} R &= \int dR \\ &= \int_a^b \frac{\rho dr}{4\pi r^2} \\ &= \frac{\rho}{4\pi} \Big|_a^b \left(-\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

2. Det oppgitte uttrykket for strømstyrken I viser at vi her kan bruke Gauss' lov for det elektriske feltet til å bestemme I :

$$I = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Vi må her forutsette at ladningen som kommer inn på den innerste lederen umiddelbart fordeler seg jevnt over kuleflaten ved $r = a$ før den starter sin vandring gjennom materialet mellom $r = a$ og $r = b$.

Potensialforskjellen mellom indre og ytre lederskall bestemmes enkelt ettersom vi kjenner feltet **E** :

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_a - V_b \\ &= - \int_b^a E(r) dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Big|_b^a \frac{1}{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)\end{aligned}$$

Av disse uttrykkene følger det at motstanden er

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$