Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

Løsningsforslag til øving 12

Veiledning uke 13

Oppgave 1

Kirchhoffs spenningsregel (K2) gir

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{C} = RI_R$$

mens Kirchhoffs strømregel (K1) gir

$$I = I_C + I_R$$

Dessuten har vi

$$I_C = \frac{dQ}{dt}$$

Dermed:

$$\begin{aligned} I_R(t) &= \frac{V_0}{R}\cos\omega t \\ Q(t) &= V_0 C\,\cos\omega t \\ I_C(t) &= -\omega C V_0\,\sin\omega t = \omega C V_0\,\cos(\omega t + \pi/2) \end{aligned}$$

Total strøm levert av spenningskilden blir dermed

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\cos\omega t - \omega C V_0\,\sin\omega t$$

Vi ønsker å ha $I(t)$ på formen

$$I(t) = I_0\,\cos(\omega t - \alpha)$$

med amplitude $I_0 = V_0/Z$, der Z er impedansen til parallellkoblingen av R og C, mens α blir fasevinkelen, dvs faseforskyvningen mellom $\mathcal{E}(t)$ og $I(t)$. Vi har

$$\cos(\omega t - \alpha) = \cos\omega t\,\cos\alpha + \sin\omega t\,\sin\alpha$$

Dermed, ved direkte sammenligning:

$$\begin{aligned} \frac{\cos\alpha}{Z} &= \frac{1}{R} \\ \frac{\sin\alpha}{Z} &= -\omega C \end{aligned}$$

Disse to ligningene, med to ukjente Z og α, løses lett, og vi finner

$$\begin{aligned} Z &= \frac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \\ I_0 &= \frac{V_0}{R}\sqrt{1+(\omega RC)^2} \\ \alpha &= -\arctan(\omega RC) \end{aligned}$$

I grensen $\omega \to 0$ bør vi gjenfinne "velkjente" resultater fra likespenningseksemplene i forelesningene, og det gjør vi: $Z \to R$ og $\alpha \to 0$ slik at $I_0 \to V_0/R$. All strøm går gjennom motstanden R, mens kapasitansen C nå representerer en åpen krets der det ikke går noen likestrøm.

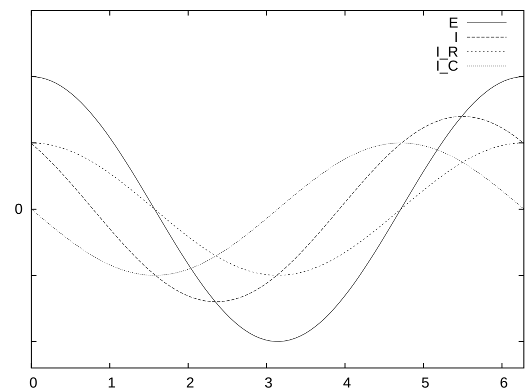
Med de oppgitte tallverdiene har vi

$$\omega RC = 2\pi \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 10^{-9} = 1.0$$

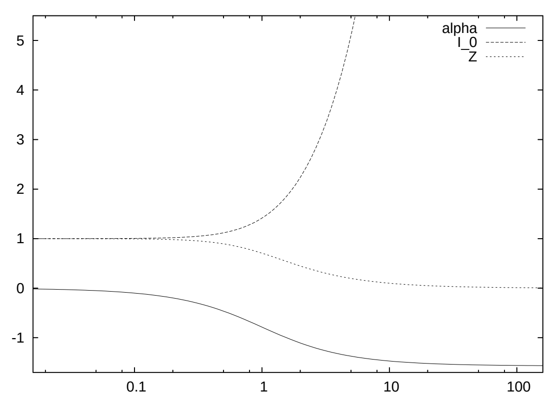
slik at

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1.0}{10} \cdot \sqrt{2} = 0.14 \text{ A} \\ \alpha &= -\arctan 1.0 = -45^\circ \end{aligned}$$

Skisse av $\mathcal{E}(t)$, $I(t)$, $I_R(t)$ og $I_C(t)$:



Skisse av α, I_0 og Z (med α i radianer og ωRC mellom 0.016 og 160 langs horisontal akse):



Oppgave 2

I det første eksperimentet er $B = 0$. Da er Newtons 2. lov

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{E} \\
\Rightarrow \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \frac{q}{m}\boldsymbol{E} \\
\Rightarrow \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}(0) + \frac{q}{m}\boldsymbol{E}t = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\
\Rightarrow \boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}(0)t + \frac{q}{2m}\boldsymbol{E}t^2
\end{aligned}$$

Her er det naturlig å velge $t = 0$ idet partikkelen entrer området med $E \neq 0$, og dessuten velge origo i denne posisjonen:

$$\boldsymbol{r}(0) = (x_0, y_0) = (0, 0)$$

Her er hastigheten

$$\boldsymbol{v}(0) = v\ \hat{x}$$

når vi legger x-aksen mot høyre. y-aksen legger vi oppover, slik at

$$\boldsymbol{E} = -E\ \hat{y}$$

(dvs med $E > 0$) Partikkelbanen inne i feltet blir altså en parabel, akkurat som når vi kaster en masse i tyngdefeltet. Hastigheten i x-retning påvirkes ikke slik at

$$x(t) = vt$$

mens partikkelen får en konstant akselerasjon i y-retning, dvs forflytningen i y-retning som funksjon av t må være bestemt ved

$$y(t) = -\frac{q}{2m}Et^2$$

Partikkelen vil forlate området der $E \neq 0$ ved tidspunktet

$$t_L = \frac{x(t_L)}{v} = \frac{L}{v}$$

Vertikalposisjonen er da

$$y(t_L) = -\frac{q}{2m}E\frac{L^2}{v^2}$$

Allerede nå kan vi konkludere med at $q < 0$ dersom $y(t_L) > 0$.
Distansen fra $x = L$ til $x = L + D$ tilbakelegges deretter uten påvirkning av noen krefter, med retning i forhold til x-aksen gitt ved vinkelen α, der

$$\tan\alpha = \frac{v_y(t_L)}{v_x(t_L)} = \frac{-(q/m)E(L/v)}{v} = -\frac{qEL}{mv^2}$$

Vi må dessuten ha

$$\tan\alpha = \frac{y - y(t_L)}{D}$$

der y er treffpunktet på detektoren, ved $x = L + D$.

Eksperimentet gjentas nå med samme E-felt, men vi skrur nå på et magnetfelt B med retning inn i planet inntil partiklene ikke avbøyes av feltene. Det må bety at den elektriske krafta (oppover) akkurat balanseres av en magnetisk kraft (nedover). Altså:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0 \\ \Rightarrow E &= vB \\ \Rightarrow \frac{1}{v} &= \frac{B}{E} \end{aligned}$$

Dermed:

$$\begin{aligned} \frac{y - y(t_L)}{D} &= -\frac{qEL}{mv^2} = -\frac{qEL}{m} \cdot \frac{B^2}{E^2} \\ \Rightarrow y + \frac{q}{2m} EL^2 \frac{B^2}{E^2} &= -\frac{qEL}{m} \cdot \frac{B^2}{E^2} D \\ \Rightarrow yE &= -\frac{q}{m} \cdot B^2 \left(DL + \frac{1}{2} L^2 \right) \\ \Rightarrow \frac{q}{m} &= -\frac{yE}{B^2 \left(DL + \frac{1}{2} L^2 \right)} \end{aligned}$$

Dvs,

$$a = \frac{E}{B^2 \left(DL + L^2/2 \right)}$$

Oppgave 3

a) Ionenes hastighet når de kommer inn i magnetfeltet er gitt ved at endringen i potensiell energi gjennom spenningsforskjellen V tilsvarer endringen i ionenes kinetiske energi:

$$eV = \frac{1}{2} mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

Sentripetalakselerasjonen inne i magnetfeltet er

$$a = \frac{v^2}{r}$$

slik at Newtons 2. lov gir

$$F = m\frac{v^2}{r} = evB \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{eB}$$

Baneradius for en partikkel med masse m blir

$$r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Vm}{e}}$$

altså proporsjonal med $\sqrt{m}$. Baneradier og masser for de ulike isotopene må altså forholde seg til hverandre på følgende vis:

$$\frac{r_i}{r_j} = \sqrt{\frac{m_i}{m_j}}$$

der $i, j = 79$ eller 81.
Dersom ionenes treffpunkt på den fotografiske platen skal være adskilt med (minst) en avstand $a = 1.0$ cm, må forskjellen i banenes *diameter* være 1.0 cm. Vi får:

$$a = 1.0 \text{ cm } = 2(r_{81} - r_{79}) = 2r_{79}\left(\sqrt{\frac{m_{81}}{m_{79}}} - 1\right)$$

Det gir

$$r_{79} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{m_{81}}{m_{79}}} - 1\right)^{-1} = 0.5 \text{ cm } \cdot \left(\sqrt{\frac{81}{79}} - 1\right)^{-1} \simeq 39.7 \text{ cm}$$

og

$$r_{81} = r_{79} + \frac{a}{2} \simeq 40.2 \text{ cm}$$

Vi kan nå bestemme hvor sterkt magnetfelt som kan brukes for å få disse baneradiene:

$$B = \frac{1}{r_{81}}\sqrt{\frac{2Vm_{81}}{e}} = \frac{1}{0.402} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 81 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}}} = 0.065 \text{ T}$$

Dette representerer øvre grense for B: Et sterkere magnetfelt vil redusere både r_{79} og r_{81}, men r_{81} mest, slik at treffpunktene kommer nærmere hverandre. Samtidig skal ikke $d_{81} = 2r_{81}$ overstige instrumentets fysiske begrensning gitt ved $L = 250$ cm. Det tilsvarer en minsteverdi på magnetfeltstyrken:

$$B_{\min} = \frac{1}{L/2}\sqrt{\frac{2Vm_{81}}{e}} = \frac{1}{1.25} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 81 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}}} = 0.021 \text{ T}$$

Vi kan med andre ord benytte et magnetfelt i området 21 til 65 mT.