Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

Løsningsforslag til øving 13

Veiledning uke 15.

Oppgave 1

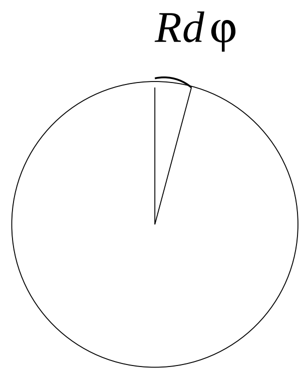
a) Argumentasjonen her tilsvarer den vi brukte da vi skulle beregne det elektriske feltet på symmetriaksen til en jevnt ladet ring. Da så vi på bidragene til feltet fra diametralt motsatte ladningselementer dq og overbeviste oss om at det totale elektriske feltet måtte peke langs symmetriaksen.
Her kan vi f.eks. se på de to lederelementene som ligger akkurat på positiv og negativ y-akse og bestemme retningen på bidraget til magnetfeltet på z-aksen fra disse. Vi tar for oss positive z først. (Se figuren på neste side. Her angir indeks + avstand fra og feltbidrag fra strømelementet som krysser positiv z-akse, mens indeks - angir tilsvarende fra strømelementet som krysser negativ z-akse.) "Strømelementet" $I\ d\boldsymbol{l}$ som krysser positiv y-akse har retning langs negativ x-akse. Kryssproduktet av denne vektoren med $\boldsymbol{r}_+$ fra strømelementet til den aktuelle posisjonen på positiv z-akse blir en vektor som ligger i yz-planet, med positiv y- og z-komponent. Det diametralt motsatte strømelementet som krysser den negative y-aksen har retning langs positiv x-akse. Kryssproduktet av denne vektoren med $\boldsymbol{r}_-$ fra strømelementet til den aktuelle posisjonen på positiv z-akse blir en vektor som også ligger i yz-planet, men denne vil ha *negativ* y-komponent og positiv z-komponent. Av symmetrigrunner må disse bidragene til $\boldsymbol{B}$ være like store i absoluttverdi, ha like store z-komponenter med samme fortegn, og ha like store y-komponenter med *motsatt* fortegn. Summen av de to bidragene peker med andre ord langs (positiv) z-akse.
Tilsvarende argumentasjon kan vi benytte for par av diametralt motsatte strømelementer rundt hele den strømførende ringen. De vil alle ha like stor z-komponent med samme fortegn og like store x- og y-komponenter med motsatt fortegn.
Konklusjon: $\boldsymbol{B}$ på positiv z-akse har retning langs z-aksen.

b) I forrige punkt overbeviste vi oss om at $\boldsymbol{B}(z)$ har retning langs positiv z-akse når $z > 0$. Hva hvis $z < 0$?
En figurbetraktning tilsvarende den vi gjorde under punkt *a*) viser at strømelementet som krysser den positive y-aksen gir et bidrag til $\boldsymbol{B}(z)$ på negativ z-akse som ligger i yz-planet med positiv z-komponent og negativ y-komponent. For strømelementet som krysser den negative y-aksen finner vi et bidrag med positiv z-komponent og positiv y-komponent. Alt i alt et magnetfelt med retning langs positiv z-akse.
Konklusjon: Magnetfeltet peker langs positiv z-akse på hele z-aksen.

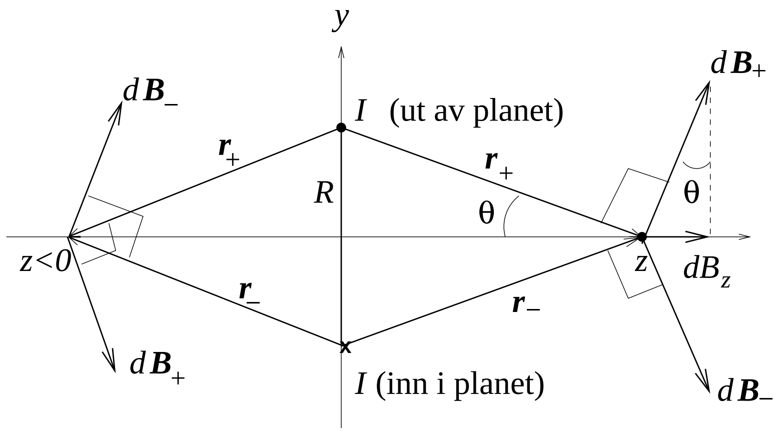
c) Vektorene $I\ d\boldsymbol{l}$ og $\hat{r}$ står vinkelrett på hverandre. Dermed er

$$|I\ d\boldsymbol{l} \times \hat{r}| = IR\ d\phi \cdot 1$$

ettersom et kurveelement dl langs en sirkel er lik radien R multiplisert med vinkelelementet $d\phi$:



Retningen på $d\boldsymbol{B}$ må bli som vist i figuren:



Fra figuren ser vi at

$$\frac{dB_z}{dB} = \sin\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

og det er jo nettopp z-komponenten av magnetfeltet vi her er ute etter. Absoluttverdien til $d\boldsymbol{B}$ blir

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR\,d\phi}{z^2+R^2}$$

slik at

$$dB_z = dB\sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR\,d\phi}{z^2+R^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{\mu_0 I R^2\,d\phi}{4\pi\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Den totale z-komponenten, og dermed det totale magnetfeltet, får vi deretter ved å integrere opp bidragene fra alle strømelementene i hele ringen, dvs ved å integrere dette uttrykket over vinkelen ϕ fra 0 til 2π:

$$B(z) = \int dB_z = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

som skulle vises.

d) I stor avstand fra strømsløyfa kan vi sette

$$z^2 + R^2 \simeq z^2$$

Dermed blir magnetfeltet tilnærmet lik

$$B(z) \simeq \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$$

Strømsløyfas magnetiske dipolmoment er

$$m = IA = I \cdot \pi R^2$$

så vi kan skrive dette magnetfeltet på formen

$$B(z) = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$$

Det er vel verdt å sammenligne dette resultatet med det elektriske feltet på aksen til en elektrisk dipol, i stor avstand z fra dipolen. Dette gjorde vi i øving 5, hvor vi fant

$$E(z) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$$

der p er dipolens elektriske dipolmoment. Altså nøyaktig samme resultat, med m istedetfor p og μ_0 istedetfor $1/\varepsilon_0$.
Vi skal finne flere analogier mellom elektrostatikken og magnetostatikken etterhvert!

Oppgave 2

a) Avstandsvektor (fra origo) til en punkt i ringen er:

$$\boldsymbol{r} = s\hat{s} + z\hat{z}$$

Strømtettheten er:

$$\boldsymbol{j} = \frac{I}{ab}\hat{\phi}$$

Dermed:

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j} = \frac{I}{ab}\left(s\hat{z} - z\hat{s}\right)$$

Magnetisk dipolmoment blir:

$$\boldsymbol{m} = \frac{I}{2ab}\int \left(s\hat{z} - z\hat{s}\right) s\, ds\, dz\, d\phi$$

der ϕ går fra 0 til 2π, s fra $R - a/2$ til $R + a/2$ og z fra z_0 til $z_0 + b$. I det første leddet, dvs det som er proporsjonalt med $\hat{z}$, gir integralet over z en faktor b mens integralet over ϕ gir en faktor 2π. Integralet over s blir

$$\int_{R-a/2}^{R+a/2} s^2 ds = \frac{1}{3}\left(R + a/2\right)^3 - \frac{1}{3}\left(R - a/2\right)^3$$

Det andre leddet, dvs det som er proporsjonalt med $\hat{s}$, må av symmetrigrunner forsvinne. Det kan vi også vise eksplisitt: Enhetsvektoren $\hat{s}$ er *ikke* konstant, men avhenger av vinkelen ϕ på følgende vis:

$$\hat{s} = (\cos\phi)\ \hat{x} + (\sin\phi)\ \hat{y}$$

Dermed blir hele leddet proporsjonalt med

$$\int_0^{2\pi} \hat{s}\, d\phi = \int_0^{2\pi} (\cos\phi\ \hat{x} + \sin\phi\ \hat{y})\, d\phi = 0$$

Ringens magnetiske dipolmoment blir dermed:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m} &= \frac{I}{2ab} \cdot b \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{3}(R + a/2)^3 - \frac{1}{3}(R - a/2)^3\right] \hat{z} \\ &= \frac{I\pi R^3}{3a} \left[\left(1 + \frac{a}{2R}\right)^3 - \left(1 - \frac{a}{2R}\right)^3\right] \hat{z} \end{aligned}$$

b) Med en tynn ring, $a \ll R$, kan uttrykket for $\boldsymbol{m}$ rekkeutvikles til laveste orden i forholdet a/R:

$$\left(1 + \frac{a}{2R}\right)^3 \simeq 1 + \frac{3a}{2R}$$
$$\left(1 - \frac{a}{2R}\right)^3 \simeq 1 - \frac{3a}{2R}$$

En finner da:

$$\boldsymbol{m} \simeq I\pi R^2 \hat{z}$$

Her kan man alternativt bare multiplisere ut de to parentesene som er opphøyd i 3. potens, det blir jo ikke mer enn 4 ledd fra hver. Da får man:

$$\left(1 + \frac{a}{2R}\right)^3 - \left(1 - \frac{a}{2R}\right)^3 = \frac{3a}{R} + \frac{a^3}{4R^3} \simeq \frac{3a}{R}$$

der siste tilnærmelse kunne gjøres fordi $a \ll R$.

Oppgave 3

a) Sentripetalakselerasjonen er v_0^2/R mens Coulombkraften er $e^2/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Newtons 2. lov gir da

$$m_e \frac{v_0^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v_0^2}$$

Banedreieimpulsen til elektronet er

$$\boldsymbol{L}_0 = m_e\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_0 = m_e R\, v_0\, \hat{z}$$

mens dets magnetiske dipolmoment er

$$\boldsymbol{m}_0 = I\boldsymbol{A} = -\frac{e}{2\pi R/v_0} \cdot \pi R^2\ \hat{z} = -\frac{1}{2} e v_0 R\ \hat{z} = -\frac{e}{2m_e} \boldsymbol{L}_0$$

b) Den valgte retningen på $\boldsymbol{B}$ fører til at den magnetiske kraften $\boldsymbol{F}_m = -e\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ blir rettet innover mot kjernen, dvs i samme retning som den tiltrekkende Coulombkraften. Med uendret baneradius R bestemmes dermed hastigheten v av ligningen

$$m_e \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + evB$$

Dette er en annengradsligning for v,

$$v^2 - \frac{eBR}{m_e}\, v - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} = 0,$$

med løsning

$$v = \frac{eBR}{2m_e} + \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} + \left(\frac{eBR}{2m_e}\right)^2}$$

(Løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten er negativ og ikke aktuell.)
La oss gå tilbake og se på hastigheten uten magnetfelt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R}}$$

Vi ser umiddelbart at $v > v_0$. Det betyr at det magnetiske dipolmomentet

$$\boldsymbol{m} = -\frac{1}{2} evR\ \hat{z}$$

er større enn før vi skrudde på magnetfeltet. Med andre ord, *endringen*

$$\Delta\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

er motsatt rettet det ytre magnetfeltet.
Hvis magnetfeltet istedet var rettet nedover, $\boldsymbol{B} = -B\ \hat{z}$, ville den magnetiske kraften bli rettet radielt *utover*, dvs i motsatt retning av Coulombkraften, slik at tilleggsleddet evB i bevegelsesligningen ville komme inn med motsatt fortegn. Dermed ville den nye hastigheten v ha blitt mindre enn v_0, og det magnetiske dipolmomentet også mindre enn før vi skrudde på magnetfeltet. Igjen: *Endringen* i magnetisk dipolmoment ville fremdeles ha vært motsatt rettet det ytre feltet.
Konklusjon: Et ytre magnetfelt påvirker elektronets banebevegelse i atomet på en slik måte at det *induserte* magnetiske dipolmomentet, dvs det magnetiske dipolmomentet knyttet til endringen i banebevegelsen, blir motsatt rettet det påtrykte feltet. Altså *diamagnetisme*.