Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

Løsningsforslag til øving 14

Veiledning uke 16

Oppgave 1

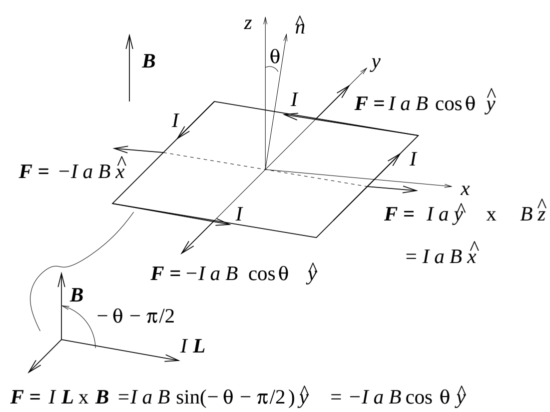
a) Sløyfas magnetiske dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = IA\,\hat{n} = Ia^2\,\hat{n}$$

Sløyfa består av 4 rette ledere med lengde a, der to og to har strømmen gående i motsatt retning. Dermed blir den magnetiske kraften

$$\boldsymbol{F} = I\int d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

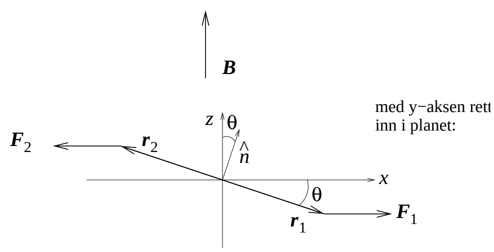
motsatt rettet, men like stor i absoluttverdi, for slike par av rette lederbiter. Den totale kraften på sløyfa blir dermed null. Noen detaljer er inkludert i figuren:



Vi ser av figuren at kreftene fra magnetfeltet ville ha deformert strømsløyfa dersom det hadde vært en mulighet. For ei makroskopisk strømsløyfe er dette som regel en neglisjerbar effekt, men dersom strømsløyfa er en klassisk modell av et elektron i bane rundt en atomkjerne, aner vi at *i tillegg* til en innretting av strømsløyfa (som vi skal se på i resten av denne oppgaven), vil magnetfeltet påvirke selve banebevegelsen til elektronet rundt kjernen. Med andre ord: Atomets magnetiske moment endres både i *retning* og i *absoluttverdi*. Førstnevnte effekt er *paramagnetisme*, sistnevnte effekt er *diamagnetisme*. En klassisk modell av diamagnetisme ser vi nærmere på i oppgave 3, her konsentrerer vi oss om orienteringen av $\boldsymbol{m}$.

b) Av figuren over ser vi at de to strømmene som går parallelt med xz-planet påvirkes av krefter i hhv positiv og negativ y-retning. Disse kreftene vil da ikke bidra til dreiemomentet omkring y-aksen.

Kreftene som virker på strømmene som går parallelt med y-aksen gir tilsammen et dreiemoment (se figuren nedenfor og ovenfor)



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \\
&= -r_1 F_1 \sin\theta \; \hat{y} - r_2 F_2 \sin\theta \; \hat{y} \\
&= -2 \cdot \frac{a}{2} \cdot IaB \sin\theta \; \hat{y} \\
&= -Ia^2 \cdot B \sin\theta \; \hat{y} \\
&= -m \cdot B \sin\theta \; \hat{y} \\
&= \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

Skiftet av fortegn i siste linje skyldes av vi hadde valgt positiv vinkel θ mellom z-aksen og $\hat{n}$, altså mellom $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{m}$. Kryssproduktet $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ er, pr definisjon, m ganger B ganger sinus til vinkelen mellom $\boldsymbol{m}$ og $\boldsymbol{B}$, dvs $mB\sin(-\theta) = -mB\sin\theta$.

c) I oppgave 4c i øving 6 hadde vi en *generell* sammenheng mellom dreiemoment τ og tilhørende potensiell energi U, nemlig at en rotasjon gjennom en vinkel $d\alpha$ under påvirkning av et dreiemoment τ resulterer i en endring dU i potensiell energi gitt ved

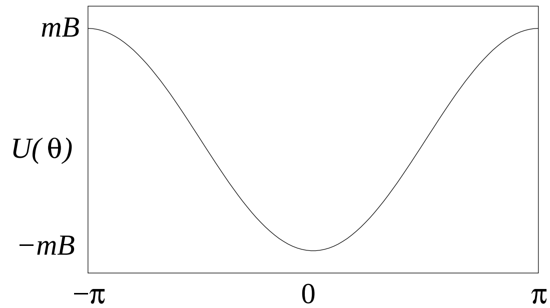
$$dU = -\tau \; d\alpha$$

Denne sammenhengen er ikke avhengig av hvilken *type* krefter og dreiemoment det handler om, og må derfor gjelde like bra for vår magnetiske dipol i et magnetfelt som for den elektriske dipolen i et elektrisk felt i øving 6. Følgelig:

$$\begin{aligned}
U(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} dU \\
&= -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\alpha) \; d\alpha \\
&= mB \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\alpha \; d\alpha \\
&= mB\,(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\
&= -mB\cos\theta \\
&= -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

Her valgte jeg å sette $U(0) = -mB$, dvs $\theta_0 = \pi/2$.

Skisse:



Vi har minimal U, og følgelig stabil likevekt for $\theta = 0$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{m}$ er parallell med $\boldsymbol{B}$. Vi har maksimal U, og følgelig ustabil likevekt for $\theta = \pm\pi$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{m}$ er parallell med $-\boldsymbol{B}$.
Dette er magnetismens analogi til polarisering av dielektriske medier i et ytre elektrisk felt: Magnetiske dipoler retter seg inn langs det påtrykte magnetfeltet. Som nevnt lenger opp, dette er hva vi kaller *paramagnetisme*. Vi har snakket om ulike typer magnetisme i forelesningene – la dette være en liten oppsummering av det:
Medier som består av atomer som har et atomært magnetisk dipolmoment som *ikke* er lik null, og der dipolmomentene på atomer i nærheten av hverandre *ikke* vekselvirker med hverandre, er *paramagneter*. *Uten* et ytre magnetfelt vil de atomære magnetiske dipolmomentene peke i tilfeldige retninger, slik at den midlere *magnetiseringen*, dvs midlere magnetiske dipolmoment pr volumenhet (se punkt d)), blir lik null overalt i mediet. Slik var det også med midlere polarisering i et dielektrikum når vi ikke hadde noe ytre elektrisk felt. *Med* et ytre magnetfelt får vi en tendens til innretting av magnetiske dipolmoment langs det ytre feltet, og dermed en midlere magnetisering forskjellig fra null. Eksempler på paramagnetiske materialer er aluminium (Al) og magnesium (Mg).
Medier som består av atomer med atomært magnetisk dipolmoment *lik null* har ingenting å rette inn i et påtrykt magnetfelt. Men, og som nevnt lenger opp, *banebevegelsen* til elektronene rundt atomkjernen vil påvirkes av et ytre magnetfelt, slik at vi får *indusert* et atomært magnetisk dipolmoment i hvert eneste atom. Slike medier er *diamagneter*. Vi skal se kvalitativt på denne effekten i oppgave 3 nedenfor og finne at det induserte magnetiske dipolmomentet vil bli *motsatt rettet det ytre feltet*. Diamagnetisme er en mye svakere effekt enn paramagnetisme. Også i paramagneter, der vi *har* permanente atomære magnetiske dipolmoment, får vi en slik diamagnetisk "respons" i et ytre magnetfelt. Den diamagnetiske responsen vil imidlertid være tilnærmet neglisjerbar i en paramagnet. For å kunne måle diamagnetisme, trenger vi derfor medier med null atomært magnetisk dipolmoment i utgangspunktet (dvs før vi skrur på det ytre magnetfeltet). Eksempler på diamagneter er gull (Au), sølv (Ag), kobber (Cu).
I enkelte medier har vi atomer med magnetiske dipolmoment som *vekselvirker* med dipolmomentene på naboatomene. F.eks. kan vekselvirkningen være slik at det er energetisk foretrukket at naboatomer har sine magnetiske dipolmoment i samme retning. Da har vi en *ferromagnet*, og eksempler på ferromagneter er jern (Fe), kobolt (Co) og nikkel (Ni).

d) Maksimal tetthet av magnetisk dipolmoment i jern blir lik antall jernatomer pr volumenhet ganget med magnetisk dipolmoment pr jernatom:

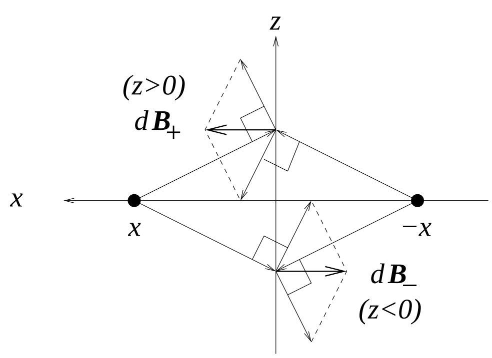
$$\frac{m}{V} = 2\mu_B \cdot \frac{7.9 \cdot 10^6}{55.9} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 2 \cdot 9.27 \cdot 10^{-24} \cdot \frac{7.9 \cdot 10^6}{55.9} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 1.6 \cdot 10^6$$

Enheten til m er Am^2, enheten til V er m^3. Følgelig blir enheten til magnetisk dipolmoment pr volumenhet, eller *magnetisering*, A/m.

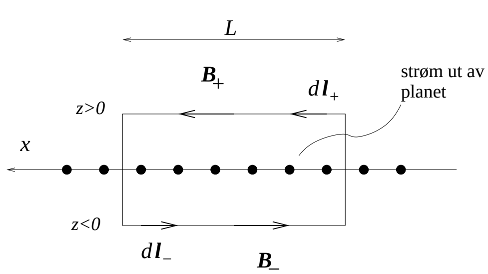
Oppgave 2

Retningen på $\boldsymbol{B}$:

- $B_y = 0$ fordi $d\boldsymbol{B} \sim \hat{y} \times \hat{r} \perp \hat{y}$ ifølge Biot-Savarts lov. (Alle strømbidrag går i y-retningen.)
- $B_z = 0$: Se på figuren nedenfor. Her er $d\boldsymbol{B}_+$ og $d\boldsymbol{B}_-$ bidrag til magnetfeltet henholdsvis over og under xy-planet fra "symmetrisk lokaliserte" uendelig lange, tynne strømførende ledere i posisjon $\pm x$. Biot-Savarts lov og figurbetraktning gir at $\boldsymbol{B}$ må være rettet i positiv x-retning for $z > 0$ og i negativ x-retning for $z < 0$.



Absoluttverdien av magnetfeltet kan ikke avhenge av x eller y når det strømførende planet er uendelig stort. Dessuten må B være like stor en avstand z over xy-planet som en avstand z under. ($B_+ = B_- = B$, se figuren nedenfor) Da skulle vi ha det beste valget av amperekurve klart: Et rektangel med flatenormal i positiv y-retning, symmetrisk plassert i forhold til xy-planet:



Når integrasjonsveien velges som vist i figuren, er strømmen omsluttet av amperekurven *positiv*, ifølge høyrehåndsregelen. Med en lengde L i x-retningen blir den omsluttede strømmen $I_{\text{in}} = i \cdot L$. Amperes lov gir dermed:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \, d\boldsymbol{l} = 2 \cdot B \cdot L = \mu_0 i \cdot L$$

eller

$$B = \mu_0 i/2$$

(På de vertikale bitene av amperekurven er $\boldsymbol{B} \perp \, d\boldsymbol{l}$ så disse gir null bidrag til integralet.)
Alternativt kunne vi først ha lagt hele ampererektangelet på en side av xy-planet. Da hadde vi hatt null omsluttet strøm, og dermed fått at B måtte være uavhengig av z. I neste omgang legger vi amperekurven slik at den omslutter en del av xy-planet, og dermed også en viss strøm, og finner det samme som over. Så langt jeg kan se, holder det å bruke Amperes lov *en* gang når vi legger amperekurven symmetrisk om xy-planet.

Oppgave 3

Vi må her bestemme i hvilke posisjoner $\pm x_0$ vi har viklinger som gir null x-komponent for $\boldsymbol{B}$. Viklingene på intervallet $(-x_0, x_0)$ vil da være de som bidrar med negativ x-komponent til $\boldsymbol{B}$. Fra den oppgitte formelen og figuren i oppgaveteksten får vi:

$$\begin{aligned}
3\,(\boldsymbol{m}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \boldsymbol{m} &= 3\left(m\,\hat{x}\cdot\left(\frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y}\right)\right)\left(\frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y}\right) - m\hat{x} \\
&= 3m\frac{x}{r}\frac{x}{r}\hat{x} + 3m\frac{x}{r}\frac{y}{r}\hat{y} - m\hat{x} \\
&= \left(3\frac{x^2}{r^2} - 1\right) m\hat{x} + 3\frac{xy}{r^2}m\hat{y}
\end{aligned}$$

Vi har her uttrykt $\hat{r}$ i kartesiske komponenter, dvs $\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y} = (x/r)\,\hat{x} + (y/r)\,\hat{y}$, der θ er vinkelen mellom $\boldsymbol{m}$ og $\hat{r}$.
Altså null x-komponent når

$$3\frac{x^2}{r^2} - 1 = 0$$

og ettersom $r^2 = x^2 + y^2$, finner vi

$$x_0 = y/\sqrt{2}$$

På lengden $2x_0 = \sqrt{2}y = 0.707$ m har vi 707 viklinger.