Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

Løsningsforslag til øving 15

Veiledning uke 17

Oppgave 1

Den *påtrykte* strømmen I genererer et H-felt $H = nI$ på langs overalt inne i spolen (pga Amperes lov for H). Dermed er det bare å benytte at

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}\right) = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H}$$

for å bestemme de ulike størrelsene:

Inne i jernstaven:

$$H_j = nI = 2000 \text{ m}^{-1} \cdot 3 \text{ A} = 6000 \text{ A/m}$$
$$B_j = \mu_r \mu_0 H_j = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (Vs/Am)} \cdot 6000 \text{ A/m} = 15 \text{ T}$$
$$M_j = (\mu_r - 1) H_j = 1.2 \cdot 10^7 \text{ A/m}$$

I den luftfylte delen inne i spolen:

$$H_0 = H_j = 6000 \text{ A/m}$$
$$B_0 = \mu_0 H_0 = 7.5 \text{ mT}$$
$$M_0 = 0$$

Den beregnede magnetiseringen inne i jernstaven, $M_j = 1.2 \cdot 10^7$ A/m, er større enn metningsmagnetiseringen $M_s = 1.6 \cdot 10^6$ A/m, og derfor ikke fysisk mulig. Årsaken er at vi har brukt den lineære sammenhengen $B = \mu_r \mu_0 H$ mellom magnetfeltet B og feltet H fra den påtrykte strømmen. Her har vi imidlertid et så sterkt "ytre" felt H at en slik lineær sammenheng ikke lenger er gyldig. Samtlige magnetiske dipolmoment er rettet inn langs det påtrykte feltet allerede ved $H \simeq M_s/\mu_r = 800$ A/m. Ytterligere økning i H gir ingen økning i M.
Korrigert, maksimal verdi for B_j blir

$$B_j^{\text{korr}} = \mu_0 \left(H_j + M_s\right) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \left(6000 + 1.6 \cdot 10^6\right) = 2 \text{ T}$$

Oppgave 2

a) Vi har brukt Amperes lov i forelesningene til å regne ut magnetfeltet inne i en slik lang spole:

$$B = \mu_0 n I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{d} I_1$$

En vikling av spoletråden omslutter et areal $A = \pi R^2$, og dermed en magnetisk fluks

$$\phi = BA = \mu_0 \frac{N_1}{d} I_1 \pi R^2$$

Da må N_1 viklinger omslutte en fluks som er N_1 ganger så stor, for her er jo magnetfeltet konstant overalt inne i spolen. Altså:

$$\phi_1 = N_1 \phi = \mu_0 \frac{N_1^2}{d} I_1 \pi R^2$$

En vikling av spole 2 omslutter her akkurat det samme arealet, og dermed like stor fluks ϕ, slik at N_2 viklinger av spole 2 må omslutte en total magnetisk fluks lik

$$\phi_2 = N_2 \phi = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{d} I_1 \pi R^2$$

b) Selvinduktansen L blir

$$L = \frac{\phi_1}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1^2}{d} \pi R^2$$

c) Gjensidig induktans M blir

$$M = \frac{\phi_2}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{d} \pi R^2$$

d) Tallverdier:

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1200^2}{0.6} \cdot \pi \cdot 0.01^2 = 9.5 \cdot 10^{-4}$$

$$M = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1200 \cdot 600}{0.6} \cdot \pi \cdot 0.01^2 = 4.7 \cdot 10^{-4}$$

I SI-systemet har induktans fått sin egen enhet, henry (H). Her blir altså selvinduktansen 0.95 mH og den gjensidige induktansen 0.47 mH. Alternativt kunne vi f.eks. ha brukt enheten T m^2/A, ettersom magnetisk fluks må ha enheten til magnetfelt ganger areal, dvs T m^2.

Oppgave 3

a) Eksempler:
For et uendelig stort ladet plan med ladning σ pr flateenhet er det elektriske feltet motsatt rettet på den ene og den andre siden av planet, og feltstyrken er $\sigma/2\varepsilon_0$. Altså en *diskontinuitet* på i alt σ/ε_0 i feltets normalkomponent, og ingen diskontinuitet i feltets tangentialkomponent.
Inne i ei metallkule med ladning Q er det elektriske feltet null. På overflaten, ved $r = R$, er feltstyrken $Q/4\pi\varepsilon_0 R^2$, rettet radielt utover (med $Q > 0$), dvs normalt til overflaten. Igjen, en diskontinuitet på σ/ε_0 i feltets normalkomponent, ettersom $\sigma = Q/4\pi R^2$ er ladning pr flateenhet på metallkulas overflate.
Et uendelig stort strømførende plan med uniform strøm i pr lengdeenhet resulterer i et uniformt magnetfelt $\mu_0 i/2$, med motsatt retning på hver sin side av planet, se øving 13, oppgave 2. Dvs en diskontinuitet på $\mu_0 i$, og hvis du ser på øving 13, ser du at det er snakk om komponenten av $\boldsymbol{B}$ som ligger *i* planet til strømmen og som står *normalt på* strømretningen.
Inni en uendelig lang spole er magnetfeltet $\mu_0 nI$, utenfor er det null. Altså en diskontinuitet på $\mu_0 nI$. Strømmen er I pr vikling, mens antall viklinger pr lengdeenhet er n, så $i = nI$ blir her strømmen pr lengdeenhet. Igjen en diskontinuitet på $\mu_0 i$.
Kommentar: Ingen grenseflater er uendelig store, men dersom vi går tilstrekkelig nær grenseflaten, vil det *se ut som den er* uendelig stor og flat. Det *totale* elektriske feltet på grenseflaten må være lik summen av bidragene fra området i nærheten, dvs det som ser stort og flatt ut, og alle ladninger i "resten av verden". Ladningene i resten av verden er alle langt unna "krysningspunktet", dvs langt unna i forhold til ladningene som er *i* planet der vi krysser. "Resten av verden" må derfor bidra med samme felt like over og like under grenseflaten, dvs et bidrag som er *kontinuerlig*. Med andre ord, hele diskontinuiteten i det elektriske feltet skyldes ladningene i planet som vi krysser. Tilsvarende gjelder for diskontinuiteten i magnetfeltet: Totalt magnetfelt er summen av bidragene fra strømmen *i* planet der vi krysser, og alle andre strømmer i verden. Bare strømmen i planet der vi krysser bidrar til diskontinuiteten.

b) Dielektrisk skive på tvers i konstant ytre elektrisk felt $\boldsymbol{E}_0$:
Her har vi grenseflater som står normalt på feltene. Vi kan ikke uten videre bruke grenseflatebetingelsen for $\boldsymbol{E}$ for vi vet ikke hvor mye ladning vi har i grenseflatene mellom vakuum og dielektrikum. Vi vet at det induseres bundet ladning, positiv i øvre flate og negativ i nedre flate, men ikke *hvor mye*. Men vi kan bruke grenseflatebetingelsen for $\boldsymbol{D}$, for vi vet at det er null *fri* ladning i skiva. Dermed har vi $D_1 = D_0$, der $D_0 = \varepsilon_0 E_0$ er elektrisk forskyvning utenfor skiva. Dessuten har vi at $D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_1$. Dermed:

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_0 E_0 \\ E_1 &= \frac{1}{\varepsilon_r} E_0 \end{aligned}$$

Dielektrisk skive på langs i konstant ytre elektrisk felt $\boldsymbol{E}_0$:
Nå har vi grenseflater parallelt med feltretningen. Da kan vi bruke at parallellkomponenten til $\boldsymbol{E}$ er kontinuerlig, dvs $E_1 = E_0$. Sammenhengen $D_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_1$ gjelder selvsagt fortsatt, så

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_r \varepsilon_0 E_0 \\ E_1 &= E_0 \end{aligned}$$

Magnetiserbar skive på tvers i konstant ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}_0$:
Her har vi igjen grenseflater som står normalt på feltene. Vi kan da benytte oss av at B_n er kontinuerlig, dvs $B_1 = B_0$. Dessuten har vi at $B_1 = \mu_1 H_1 = \mu_r \mu_0 H_1$. Dermed:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_0 \\ B_1 &= B_0 \end{aligned}$$

Magnetiserbar skive på langs i konstant ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}_0$:
Grenseflatene er parallelt med feltene. Vi vet at det induseres magnetiseringsstrøm i skivas overflate men ikke hvor mye. Men vi kan bruke grenseflatebetingelsen for $\boldsymbol{H}$, for vi vet at det er null fri strøm i skiva. Dermed har vi $H_1 = H_0$, der $H_0 = B_0/\mu_0$ er H-feltet utenfor skiva (vakuum). Dessuten har vi $B_1 = \mu_r \mu_0 H_1$. Dermed:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\mu_0} B_0 \\ B_1 &= \mu_r B_0 \end{aligned}$$

Forklaring på ulik E_1 og B_1 i de to tilfellene:
Dielektrisk skive på tvers gir polarisering, og tilhørende indusert ladning i overflaten. Den induserte ladningen gir bidrag til feltet motsatt rettet det ytre feltet, slik at E_1 blir mindre enn E_0. Med skiva på langs blir den induserte overflateladningen lokalisert uendelig langt unna "der vi er". Dermed bidrar den ikke til feltet der vi er, og $E_1 = E_0$.
Magnetiserbar skive på langs gir magnetisering, og tilhørende indusert strøm i overflaten. Den induserte strømmen gir bidrag til feltet i samme retning som det ytre feltet, slik at B_1 blir større enn B_0. Med skiva på tvers blir den induserte overflatestrømmen lokalisert uendelig langt unna "der vi er". Dermed bidrar den ikke til feltet der vi er, og $B_1 = B_0$.