Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

Løsningsforslag til øving 5

Veiledning uke 6

Oppgave 1

a) Her har vi oppgitt $V(r,\theta)$ og gradientoperatoren i kulekoordinater, så det er bare å regne i vei (ingenting avhenger her av vinkelen ϕ, så leddet som inneholder $\partial/\partial\phi$ trenger vi ikke å bry oss med):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(r,\theta) &= -\nabla V(r,\theta) \\ &= -\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ &= \hat{r}\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} + \hat{\theta}\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\end{aligned}$$

Vi merker oss at feltet fra en elektrisk dipol i stor avstand r fra dipolen faller av som $1/r^3$, altså raskere enn feltet fra en elektrisk "monopol", dvs en punktladning, som faller av som $1/r^2$. Feltbidragene fra de to ladningene med motsatt fortegn kansellerer hverandre delvis, men ikke fullstendig, ettersom retningen på de to bidragene til $\boldsymbol{E}$ alltid vil være litt forskjellig.

Hvis $\theta = 0$, får vi

$$E_r = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

og

$$E_\theta = 0$$

Dette virker rimelig: Vi er nå i et punkt langt ute på z-aksen, slik at radiell retning blir nettopp langs z-aksen, mens θ-retningen blir langs x-aksen. Og på z-aksen må vel det elektriske feltet åpenbart ha retning langs z-aksen.
Hvis $\theta = \pi/2$, får vi

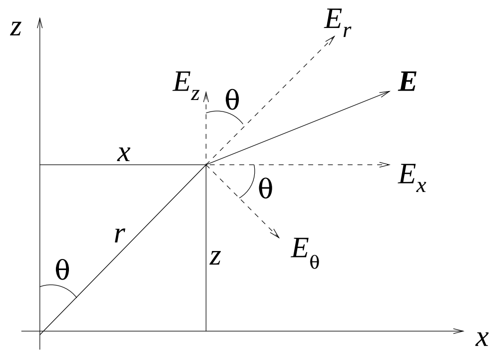
$$E_r = 0$$

og

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Dette virker også rimelig: Vi er nå i et punkt langt ute på x-aksen, slik at radiell retning blir nettopp langs x-aksen, mens θ-retningen blir langs negativ z-akse. Og på x-aksen må vel det elektriske feltet åpenbart ha retning langs negativ z-akse.
Setter vi inn $r = 0$ i uttrykkene for E_r og E_θ, ser vi at begge to går mot uendelig. Det er imidlertid ikke et reelt problem fordi vi nå forsøker å bruke uttrykket for E utenfor gyldighetsområdet $r \gg a$. Feltet i origo er langt fra uendelig, og heller ikke vanskelig å regne ut. Det klarer du helt sikkert selv!

b) Av figuren nedenfor skulle det gå relativt klart fram hvordan den elektriske feltvektoren $\boldsymbol{E}$ enten kan dekomponeres i E_r og E_θ eller i E_x og E_z.



Både E_r og E_θ har komponenter i x-retning, og den totale x-komponenten av feltet må bli summen av disse to. Figurbetraktning gir:

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_r \sin\theta + E_\theta \cos\theta \\
&= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \sin\theta + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \cos\theta \\
&= \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \\
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Her har vi brukt $\sin\theta = x/r$, $\cos\theta = z/r$ og $r = (x^2+z^2)^{1/2}$.
Helt tilsvarende finner vi z-komponenten:

$$
\begin{aligned}
E_z &= E_r \cos\theta - E_\theta \sin\theta \\
&= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \cos\theta - \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \sin\theta \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= \frac{\left(2z^2 - x^2\right)p}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

c) I kartesiske koordinater blir potensialet

$$
V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p(z/r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{3/2}}
$$

Med $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ får vi dermed

$$
E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3pzx}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
$$

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-p}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} + \frac{3pz^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-p\left(x^2+z^2\right)+3pz^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\right) \\ &= \frac{\left(2z^2-x^2\right)p}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+z^2\right)^{5/2}} \end{aligned}$$

Det samme som vi fant under punkt b)!

Oppgave 2

a) **C**

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = m\boldsymbol{a}$$

Newtons 2. lov! Her er $q = -e$, så elektronets akselerasjon blir

$$\boldsymbol{a} = -\frac{e}{m}\boldsymbol{E}$$

altså mot venstre.

b) **C**

$$\Delta V = -\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

dersom

$$d\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{E}$$

c) **B**

På samme måte som et legeme med null starthastighet faller i gravitasjonsfeltet fra f.eks. jorda, dvs beveger seg i retning lavere potensiell energi, vil en ladet partikkel med null starthastighet bevege seg i retning lavere potensiell energi i et elektrisk felt.

Matematisk: ($\boldsymbol{F}$ = kraft, q = ladning ($q < 0$), U = potensiell energi, V = potensial)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{E} = -|q|\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} &= -\nabla V \\ U &= qV = -|q|V \\ \boldsymbol{F} &= -\nabla U = -q\nabla V = |q|\nabla V \end{aligned}$$

Partikkelens bevegelse må selvsagt bli i samme retning som $\boldsymbol{F}$ (når starthastigheten er null), så vi ser at bevegelsen blir i motsatt retning av $\boldsymbol{E}$, og i retning høyere potensial V.

d) **D**

Total potensiell energi for et system med punktladninger er

$$U = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

der summen går over alle par av ladninger q_i og q_j i innbyrdes avstand r_{ij}. Her er alle ladninger like store i absoluttverdi. Vi har 4 par med motsatt fortegn i innbyrdes avstand 5 cm og 2 par (diagonalt) med likt fortegn i innbyrdes avstand $\sqrt{50}$ cm. Dermed får vi:

$$U = 9 \cdot 10^9 \cdot (9 \cdot 10^{-6})^2 \cdot \left[-\frac{4}{0.05} + \frac{2}{\sqrt{50} \cdot 10^{-2}} \right] \simeq -38 \text{ J}$$

e) **D**

Punktladningene Q_1 og Q_2 flyttes ikke, så innbyrdes potensiell energi for dette paret trenger vi ikke å bry oss om fordi den endres ikke når den tredje ladningen (elektronet) flyttes. Vi må regne ut potensiell energi som skyldes vekselvirkningen mellom elektronet og de to fastliggende ladningene, henholdsvis før og etter forflytningen. Alternativt kan vi regne ut potensialet fra ladningene Q_1 og Q_2 i punktene A og B, hhv V_A og V_B, og deretter endringen i potensiell energi, $\Delta U = U_B - U_A = -eV_B - (-e)V_A = -e(V_B - V_A)$. Potensialet i avstand r fra en punktladning q er

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

dvs Coulombpotensialet. De aktuelle avstandene her er 0.6 m (fra Q_1 til A og fra Q_2 til B) og $\sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1.0$ m (fra Q_1 til B og fra Q_2 til A). Dermed:

$$V_A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0}$$

og

$$V_B = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6}$$

som gir

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{2(Q_1 - Q_2)}{3 \cdot 4\pi\varepsilon_0} = -\frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (69 + 98) \cdot 10^{-9} = -1002 \text{ V}$$

og endelig

$$\Delta U = -e \cdot \Delta V \simeq +1 \text{ keV}$$

f) **B**

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = e \cdot \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = e \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{10} = 14.4 \text{ eV}$$

g) **D**
Energibevarelse gir

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

Dvs: Akselerasjon av en partikkel med ladning q og masse m gjennom en potensialforskjell V resulterer i at reduksjon i potensiell energi, qV, gir økning i kinetisk energi, $mv^2/2$. Like stor hastighet for de to partiklene betyr da at

$$\frac{q_\alpha V_\alpha}{m_\alpha} = \frac{q_{\mathrm{Be}} V_{\mathrm{Be}}}{m_{\mathrm{Be}}}$$

med andre ord

$$\frac{V_{\mathrm{Be}}}{V_\alpha} = \frac{q_\alpha m_{\mathrm{Be}}}{q_{\mathrm{Be}} m_\alpha} = \frac{2 \cdot 9}{4 \cdot 4} = \frac{9}{8}$$

h) **B**. Potensialet fra en punktladning er $V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r$ når $V(r \to \infty)$ er satt til null. Med $V = 50$ V finner vi

$$r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{50} = 1.8 \text{ m}$$

Med SI-enheter for alle størrelser som inngår er vi garantert at svaret også kommer ut i SI-enhet, dvs m.

i) **D**. Det elektriske feltet er den negative gradienten til potensialet, $\boldsymbol{E} = -\nabla V$. Her har vi oppgitt at potensialet er konstant lik 100 V, og gradienten til en konstant er lik null.

j) **D**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \text{graf 5}$$

k) **D**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx}\hat{x} = -15\frac{\text{V}}{\text{m}}\hat{x}$$

l) **A**

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -2\frac{\text{V}}{\text{m}}$$